Hamilton Luiz Guidorizzi

UM CURSO DE CÁLCULO

VOLUME 2



Prefácio

Este volume é continuação do volume 1. No Capítulo 1 destacamos as funções integráveis (de uma variável) que aparecem com mais freqüência nas aplicações. Este capítulo poderá ser omitido pelo leitor que já tenha estudado o Apêndice 4 do volume 1. No 2, estudamos, com relação a continuidade e derivabilidade, as funções dadas por integral. No 3, apresentamos várias aplicações da integral: cálculo de volume de sólido de revolução, área de superfície de revolução, comprimento de gráfico de função, cálculo de área em coordenadas polares e cálculo de centro de massa de figuras planas. No Capítulo 4, estudamos as integrais impróprias, e no 5, as equações diferenciais lineares de 2.ª ordem com coeficientes constantes. No 7, estudamos as funções de uma variável real com valores em $\mathbb{R}^n$, com relação a continuidade, derivabilidade e integrabilidade. O restante do livro é destinado ao estudo, com relação a continuidade e diferenciabilidade, das funções reais de várias variáveis reais. Observamos que nesta edição o segundo volume foi desvinculado dos demais em relação à numeração das páginas e dos capítulos, o que significa que agora a primeira página é página 1, o primeiro capítulo corresponde ao antigo Capítulo 16 e assim por diante. Com esta modificação, que será extensiva aos outros volumes, ficará mais fácil processar as alterações necessárias para tornar o texto cada vez mais dinâmico. Contamos, para isso, com sugestões e idéias de professores e alunos.

Quanto aos exemplos e exercícios, pensamos tê-los colocado em número suficiente para compreensão da matéria. Como no volume 1, procuramos dispor os exercícios em ordem crescente de dificuldade. Com relação aos exercícios mais difíceis, vale aqui a mesma recomendação que fizemos no prefácio do volume 1: não se aborreça caso não consiga resolver alguns deles; tudo que você terá que fazer nessas horas é seguir em frente e retornar a eles quando se sentir mais senhor de si.

Mais uma vez, queremos agradecer, pela leitura cuidadosa do manuscrito, às colegas professoras Élvia Mureb Sallum e Zara Issa Abud. É, ainda, com grande satisfação que agradeço à colega professora Elza Furtado Gomide pela leitura, comentários e sugestões de manuscritos que deram origem às primeiras apostilas precursoras deste livro.

Hamilton Luiz Guidorizzi

Sumário

1

FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

O objetivo deste capítulo é destacar as funções integráveis que vão interessar ao curso. Este capítulo poderá ser omitido pelo leitor que já tenha estudado o Apêndice 4 do Vol. 1.

1.1. ALGUNS EXEMPLOS DE FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E DE FUNÇÕES NÃO-INTEGRÁVEIS

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos de funções integráveis e de funções não-integráveis, trabalhando diretamente com a definição de integral de Riemann.

Antes de começar a estudar os exemplos que apresentaremos a seguir, sugerimos ao leitor rever a definição de integral de Riemann apresentada na Seç. 11.3 do Vol. 1.

EXEMPLO 1. Prove, pela definição, que a função constante $f(x) = k$, $x \in [a, b]$, é integrável em $[a, b]$ e que $\int_a^b f(x)\,dx = k(b - a)$.

Solução

Para toda partição $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ tem-se, independentemente da escolha de c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, i variando de 1 a n,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta x_i = k \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = k(b - a).$$

Segue que dado $\epsilon > 0$ e tomando-se um $\delta > 0$ qualquer tem-se, independentemente da escolha dos c_i,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - k(b - a)\right| = 0 < \epsilon$$

para toda partição de $[a, b]$, com máx $\Delta x_i < \delta$. Logo,

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = k(b-a)$$

ou seja, f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a).$$

Antes de passarmos ao próximo exemplo faremos a seguinte observação.

Observação. De acordo com a definição de integral, sendo f integrável em $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ que só depende de ϵ, mas não da escolha dos c_i, tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda partição P de $[a, b]$, com máx $\Delta x_i < \delta$. Segue que se P for uma partição de $[a, b]$, com máx $\Delta x_i < \delta$, e se c_i e $\bar{c}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ forem escolhidos arbitrariamente em $[x_{i-1}, x_i]$, teremos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\,\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e, portanto,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\,\Delta x_i) \right| < \epsilon$$

para toda partição P de $[a, b]$, com máx $\Delta x_i < \delta$, independentemente da escolha de c_i e $\bar{c}_i$. Deste modo, se f for integrável em $[a, b]$, duas somas de Riemann quaisquer relativas a uma mesma partição P, com máx Δx_i suficientemente pequeno, devem diferir muito pouco uma da outra, e o módulo da diferença entre elas deverá ser tanto menor quanto menor for máx Δx_i.

EXEMPLO 2. (Exemplo de função não-integrável). Prove que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável em $[0, 1]$.

Solução

Seja $P: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = 1$ uma partição qualquer de $[0, 1]$. Se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ forem *racionais*

① $$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

Se $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$ forem *irracionais*

② $$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\,\Delta x_i = 0.$$

De ① e ② e da observação anterior segue que f *não é integrável* em $[0, 1]$.

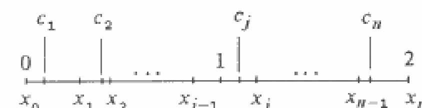
EXEMPLO 3. Seja $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Prove que f é integrável em $[0, 2]$ e que $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$.

Solução

Seja P uma partição qualquer de $[0, 2]$ e suponhamos que $1 \in [x_{j-1}, x_j]$.



Se $1 \in \,]x_{j-1}, x_j[$,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } c_j \neq 1 \\ \Delta x_j & \text{se } c_j = 1. \end{cases}$$

Se $1 = x_{j-1}$ e $c_{j-1} = c_j = 1$, $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \Delta x_{j-1} + \Delta x_j$.

Fica a seu cargo concluir que, em qualquer caso

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 0 \right| \leqslant 2 \text{ máx } \Delta x_i$$

independentemente da escolha dos c_i. Portanto,

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = 0 = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

Observe que a função do exemplo anterior *não é contínua* em [0, 2], entretanto, é integrável em [0, 2].

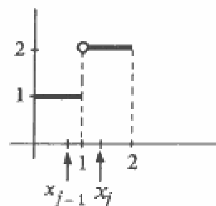
EXEMPLO 4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Prove que f é integrável em [0, 2] e que $\int_0^2 f(x)\, dx = 3.$

Solução

Consideremos a partição $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{j-1} < x_j < \ldots < x_n = 2$ e suponhamos que $1 \in [x_{j-1}, x_j]$.



Temos:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \begin{cases} x_{j-1} + (x_j - x_{j-1}) + 2(2 - x_j) & \text{se } x_{j-1} \leq c_j \leq 1 \\ x_{j-1} + 2(x_j - x_{j-1}) + 2(2 - x_j) & \text{se } 1 < c_j \leq x_j \end{cases}$$

Segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 3 = \begin{cases} 1 - x_j & \text{se } x_{j-1} \leq c_j \leq 1 \\ 1 - x_{j-1} & \text{se } 1 < c_j \leq x_j \end{cases}$$

(Interprete geometricamente.) Logo,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i - 3 \right| \leq \text{máx } \Delta x_i$$

independentemente da escolha dos c_i. Portanto,

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = 3 = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

EXEMPLO 5. Prove que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

não é integrável em [0, 1].

Solução

Seja P uma partição qualquer de [0, 1] e $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$ uma soma de Riemann de f relativa a esta partição. Tomemos c_1 em $]0, x_1[$. Se mantivermos fixos $c_2, c_3, \ldots, c_n$, teremos

$$\lim_{c_1 \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = +\infty. \text{ (Por quê?)}$$

Logo, *não* existe número L tal que

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = L$$

ou seja, f não é integrável em [0, 1].

Observe que a função do exemplo anterior *não é limitada* em [0, 1]. (Lembramos que f *limitada* em $[a, b]$ significa que existem reais α e β tais que, para todo $x \in [a, b]$, $\alpha \leq f(x) \leq \beta$.)

O próximo teorema, cuja demonstração encontra-se no Apêndice 4 do Vol. 1, conta-nos que uma *condição necessária* para f ser integrável em $[a, b]$ é que f seja *limitada* neste intervalo. Tal condição não é suficiente, pois,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é limitada em [0, 1], mas não é integrável neste intervalo.

> ***Teorema.*** Se f for integrável em $[a, b]$, então f será limitada em $[a, b]$.

Exercícios 1.1

1. Seja $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \\ 1 & \text{se } x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \end{cases}$$

Prove que f é integrável em [0, 1] e que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

2. Seja $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

a) Verifique que se os c_i forem racionais $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$ tende a $\frac{1}{2}$, quando máx $\Delta x_i \to 0$.

b) Prove que f não é integrável em $[0, 1]$.

3. Calcule, caso exista, e justifique sua resposta.

a) $\int_0^2 f(x)dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

b) $\int_0^3 f(x)dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 3 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

c) $\int_0^1 f(x)dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

d) $\int_{-1}^1 f(x)dx$ onde $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

1.2. FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

Os teoremas que enunciaremos a seguir, e cujas demonstrações encontram-se no Apêndice 4 do Vol. 1, destacam as funções integráveis que vão interessar ao curso.

O teorema 1 conta-nos que toda *função contínua* em $[a, b]$ é integrável em $[a, b]$ e, o teorema 2, que toda função *limitada* em $[a, b]$ e *descontínua em apenas um número finito de pontos* de $[a, b]$ é integrável em $[a, b]$.

> ***Teorema 1.*** Se f for contínua em $[a, b]$, então f será integrável em $[a, b]$.

> ***Teorema 2.*** Se f for limitada em $[a, b]$ e descontínua em apenas um número finito de pontos de $[a, b]$, então f será integrável em $[a, b]$.

EXEMPLO 1. $f(x) = \cos 3x$ é contínua em $[-1, 5]$, logo integrável neste intervalo.

EXEMPLO 2. Verifique se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

é integrável em $[-1, 3]$.

Solução

f é limitada em $[-1, 3]$, pois, para todo x em $[-1, 3]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$; além disso, f é descontínua apenas em $x = 1$. Pelo teorema 2, f é integrável em $[-1, 3]$.

EXEMPLO 3. Verifique se

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

é integrável em $[-1, 3]$.

Solução

Não, pois f não é limitada em $[-1, 3]$.

Exercícios 1.2

1. A função dada é integrável? Justifique.

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$

b) $f(x) = e^{-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\text{sen } x}{x} & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{sen } \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \text{ sen } \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leqslant \dfrac{2}{\pi} \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } |x| \leqslant 1,\ x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2

FUNÇÃO DADA POR INTEGRAL

2.1. CÁLCULO DE INTEGRAL DE FUNÇÃO LIMITADA E DESCONTÍNUA EM UM NÚMERO FINITO DE PONTOS

O teorema que vamos enunciar e demonstrar a seguir conta-nos que se f e g *forem integráveis em* $[a, b]$ *e se* $f(x)$ *for diferente de* $g(x)$ *em apenas um número finito de pontos, então suas integrais serão iguais.*

> ***Teorema.*** Sejam f e g integráveis em $[a, b]$ e tais que $f(x) \neq g(x)$ em apenas um número finito de pontos. Então
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demonstração

$h(x) = g(x) - f(x)$ é integrável em $[a, b]$ e $h(x) = 0$, exceto em um número finito de pontos. Como

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(c_i)\,\Delta x_i$$

independe da escolha dos c_i, resulta que tal limite é zero, pois, para cada partição P de $[a, b]$, podemos escolher c_i em $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \ldots, n$ de modo que $h(c_i) = 0$. Assim

$$\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(c_i)\Delta x_i = 0$$

ou seja,

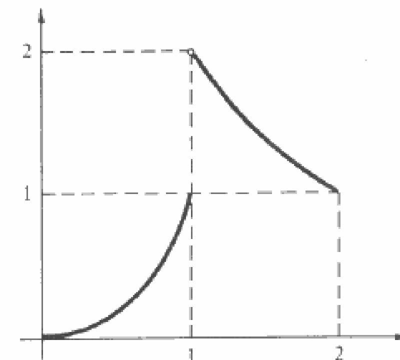
$$\int_c^b (g(x) - f(x))\,dx = 0$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 1. Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$



Solução

f é integrável em $[0, 2]$, pois é limitada e descontínua em apenas $x = 1$. Temos

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx.$$

Em $[0, 1]$, $f(x) = x^2$; logo,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Em $[1, 2]$, $f(x)$ difere de $\dfrac{2}{x}$ em apenas $x = 1$; daí

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{2}{x}\,dx = \left[\,2\ln x\,\right]_1^2 = 2\ln 2.$$

Portanto,

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + 2\ln 2.$$

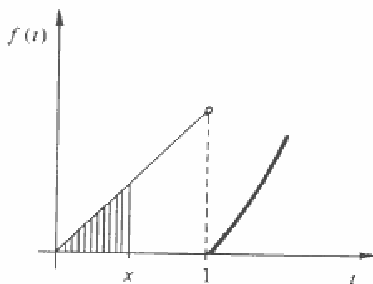
EXEMPLO 2. Calcule $\int_0^x f(t)\,dt$, $x \geqslant 0$, onde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leqslant t < 1 \\ t^2 - 1 & \text{se } t \geqslant 1. \end{cases}$$

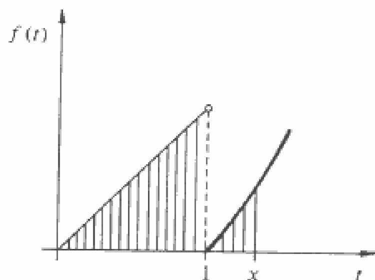
Solução

Para todo $x \geq 0$, f é integrável em $[0, x]$, pois, neste intervalo, f é limitada e descontínua no máximo em um ponto. Temos

$$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x t\,dt & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 t\,dt + \int_1^x (t^2 - 1)\,dt & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t\,dt$



$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt + \int_1^x (t^2 - 1)\,dt$

Como

$$\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2} \text{ e } \int_0^x (t^2 - 1)dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^x = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$$

segue que

$$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{7}{6} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_p$, p pontos do intervalo $[a, b]$ e seja f uma função definida em todos os pontos de $[a, b]$, exceto em $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Suponhamos f limitada e contínua em todos os pontos de seu domínio. Pela definição de integral, não tem sentido falar na integral de f em $[a, b]$, pois f não está definida em todos os pontos de $[a, b]$. Entretanto, a função g definida em $[a, b]$ e dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \\ m_i & \text{se } x = x_i, i = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

onde $m_1, m_2, \ldots, m_p$ são números escolhidos arbitrariamente, é integrável em $[a, b]$ e o valor da integral independe da escolha dos m_i. Nada mais natural, então, do que definir a *integral de f em* $[a, b]$ por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

EXEMPLO 3. Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$ onde

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Solução

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{4} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{3}{4}.$$

EXEMPLO 4. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ não existe no sentido de Riemann, pois $\frac{1}{x}$ *não* é limitada em $]0, 1]$.

Exercícios 2.1

1. Calcule

a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b) $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

c) $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

d) $\int_{-2}^{2} g(u)\,du$ onde $g(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{u^2} & \text{se } |u| \geq 1 \\ u & \text{se } |u| < 1 \end{cases}$

2. Calcule

a) $\int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

b) $\int_{-1}^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } -1 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{se } t > 1 \end{cases}$

c) $\int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } -1 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{se } t > 1 \end{cases}$

d) $\int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ 3 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$

2.2. Função Dada por uma Integral

Seja f uma função definida num intervalo I e integrável em todo intervalo $[c, d]$ contido em I. Seja a um número fixo pertencente a I. Para todo x em I, a integral $\int_a^x f(t)\,dt$ existe; podemos, então, considerar a função F definida em I e dada por

① $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Nosso objetivo é estudar a F com relação à continuidade e derivabilidade. Na Seç. 2.4, estudaremos ① supondo *f contínua em I*; provaremos que, neste caso, *F é derivável em I e que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.* Na Seç. 2.5, estudaremos ① supondo apenas que f seja integrável em todo intervalo $[c, d] \subset I$ e, portanto, não necessariamente contínua em I. Provaremos, então, que mesmo neste caso a F será *contínua* em I; provaremos, ainda, que F será *derivável em todos os pontos em que f for contínua e se p for um ponto de continuidade de f, então $F'(p) = f(p)$.*

Observe que, tendo em vista o que dissemos acima, o *gráfico de F não pode apresentar salto*. Portanto, se você estiver esboçando o gráfico de uma função dada por uma integral e se o seu gráfico apresentar salto, apague e comece de novo!

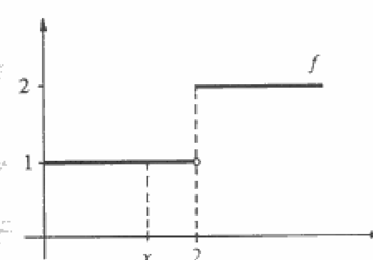
EXEMPLO 1. Esboce o gráfico de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 2 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

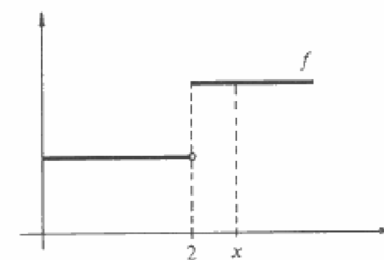
Solução

F está definida para todo $x \geq 0$. Temos

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 1\,dt & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \int_0^2 1\,dt + \int_2^x 2\,dt & \text{se } x > 2 \end{cases}$$



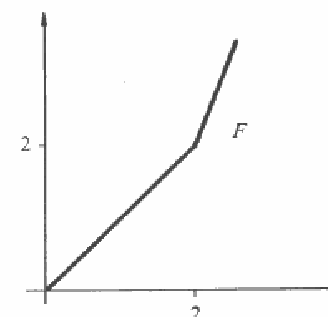
$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt$ se $0 \leq x \leq 2$



$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^2 1\,dt + \int_2^x 2\,dt$ se $x > 2$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Observe que F é contínua e que $F'(x) = f(x)$ em todo $x \neq 2$.



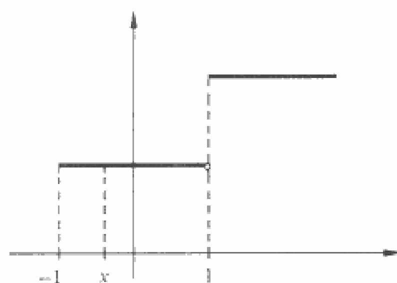
EXEMPLO 2. Esboce o gráfico da função

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{onde} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leqslant t < 1 \\ 2 & \text{se } t \geqslant 1 \end{cases}$$

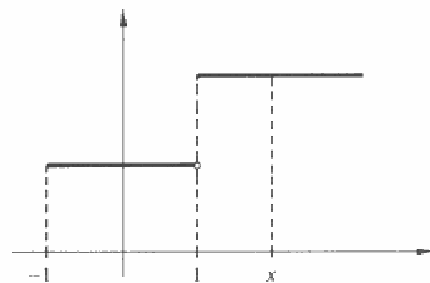
Solução

O domínio de F é o intervalo $[-1, +\infty[$. Temos:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x 1\,dt & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \int_0^1 1\,dt + \int_1^x 2\,dt & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

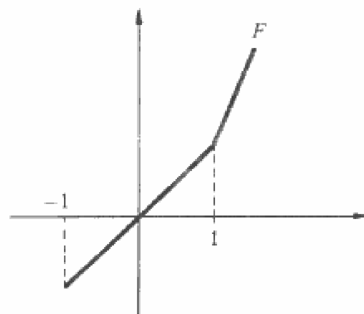


$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt$ se $-1 \leqslant x \leqslant 1$



$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^x 2\,dt$ se $x > 1$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + [\,2t\,]_1^x & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



EXEMPLO 3. Considere a função $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \neq 0$.

a) Determine o domínio de F.

b) Verifique que $F'(x) = f(x)$ para todo $x > 0$.

Solução

a) Se $x > 0$, f será contínua no intervalo de extremidades 1 e x; logo, $\int_1^x f(t)\,dt$ existe para todo $x > 0$. Se $x \leqslant 0$, a integral $\int_1^x f(t)\,dt$ *não existe*, pois f não é limitada em $]0, 1]$. O domínio de F é, então, o intervalo $]0, +\infty[$.

b) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, $x > 0$; assim

$$F(x) = [\,\ln t\,]_1^x = \ln x.$$

Segue que $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$, $x > 0$.

Exercícios 2.2

1. Esboce o gráfico da função F dada por

a) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leqslant t < 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t \geqslant 1 \end{cases}$

b) $F(x) = \int_1^x t\,dt$

c) $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$

d) $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$

e) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } -2 \leqslant t \leqslant 0 \\ e^{-t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$

f) $F(x) = \int_{-5}^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \geqslant 1 \\ t^2 & \text{se } |t| < 1 \end{cases}$

g) $F(x) = \int_0^x e^{-|t|}\,dt$

2. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \neq 1 \\ 2 & \text{se } t = 1 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de F.

b) Calcule $F'(x)$.

3. Determine o domínio da função F

a) $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t-1}\,dt$

b) $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t-1}\,dt$

c) $F(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2-4}\,dt$

d) $F(x) = \int_3^x \frac{t}{t^2-4}\,dt$

4. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } t < 1 \\ \frac{2}{t} & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$

a) Verifique que $F'(x) = f(x)$ em todo x em que f for contínua.

b) F é derivável em $x = 1$?

5. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 1 \\ 2 & \text{se } t = 1. \end{cases}$

a) Verifique que $F'(x) = f(x)$ em todo x em que f for contínua.

b) F é derivável em $x = 1$? Em caso afirmativo, calcule $F'(1)$ e compare com $f(1)$.

6. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } t < 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$

Verifique que $F'(x) = f(x)$ para todo x.

2.3. Teorema do Valor Médio para Integral

No próximo parágrafo, vamos enunciar e demonstrar o 2.º teorema fundamental do cálculo. Para tal, vamos precisar do *teorema do valor médio* ou *teorema da média para integral*.

> ***Teorema (do valor médio para integral).*** Se f for *contínua* em $[a, b]$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Demonstração

Como f é contínua em $[a, b]$, pelo teorema de Weierstrass, f assume em $[a, b]$ valor máximo e valor mínimo. Sejam M o valor máximo e m o valor mínimo de f em $[a, b]$. Assim, para todo x em $[a, b]$,

$$m \leq f(x) \leq M$$

e daí

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

ou seja,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

e, portanto,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

Deste modo, $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ é um número entre o menor e o maior valor de f em $[a, b]$; pelo teorema do valor intermediário, existe c em $[a, b]$ tal que

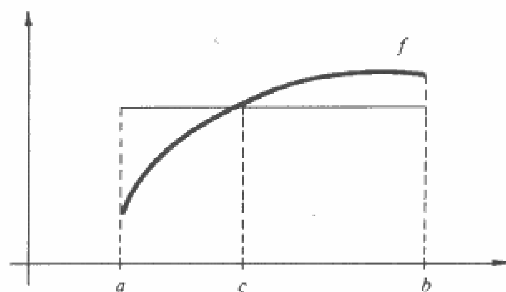
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \quad \blacksquare$$

Interpretação Geométrica do Teorema do Valor Médio para Integral

Suponhamos f contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Assim, $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área do conjunto A limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, pelo eixo Ox e pelo gráfico de $y = f(x)$. O teorema do valor médio conta-nos, então, que existe c em $[a, b]$ tal que a área do retângulo de base $b - a$ e altura $f(c)$ é igual à área de A.



Antes de encerrar a seção, vamos destacar uma outra propriedade que será utilizada na demonstração do 2.º teorema fundamental do cálculo.

Seja f integrável em $[a, b]$ e seja $c \in\,]a, b[$. Vimos na Seç. 11.4 (Vol. 1) que se f for integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Pois bem, na próxima seção, vamos precisar da seguinte propriedade, cuja demonstração deixamos a seu cargo: "Se f for integrável em todo intervalo fechado contido em I, então

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\, dx + \int_\gamma^\beta f(x)\, dx$$

quaisquer que sejam α, β e γ no intervalo I."

Exercícios 2.3

1. Suponha $f(x) > 0$ e contínua em $[a, b]$. Prove que $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.

2. Suponha $f(x) \geq 0$ e contínua em $[a, b]$. Prove que se $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, então $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$.

3. Suponha $f(x) \geq 0$ e integrável em $[a, b]$. A afirmação

$$\text{“}\int_a^b f(x)\, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ em } [a, b]\text{”}$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

4. Suponha f contínua em $[a, b]$. Prove

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ em } [a, b].$$

5. Sejam f e g contínuas em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Prove que existe $\theta \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(\theta) \int_a^b f(x)\, dx.$$

2.4. Teorema Fundamental do Cálculo. Existência de Primitivas

Seja f *contínua* no intervalo I e seja a um ponto em I. Como estamos supondo f contínua em I, para todo x em I, a integral $\int_a^x f(t)\, dt$ existe; podemos, então, considerar a função F definida em I e dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Provaremos a seguir que a F acima é uma primitiva de f em I, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo x em I. No que segue, referir-nos-emos a este resultado como *2.º teorema fundamental do cálculo* ou, simplesmente, *teorema fundamental do cálculo*.

Teorema (fundamental do cálculo). Seja f definida e contínua no intervalo I e seja $a \in I$. Nestas condições, a função F dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,\ x \in I$$

é uma primitiva de f em I, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Demonstração

Precisamos provar que, para todo x em I,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Temos

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais existe c entre x e $x + h$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c)\, h.$$

Assim,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(c)$$

Tendo em vista a continuidade de f em I e observando que c tende a x quando h tende a zero resulta

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x). \quad \blacksquare$$

Observe que o teorema fundamental do cálculo garante-nos que toda função contínua em um intervalo admite, neste intervalo, uma primitiva e, além disso, exibe-nos, ainda, uma primitiva.

EXEMPLO 1. Seja $F(x)=\int_1^x \frac{3}{1+t^4}\,dt$. Calcule $F'(x)$.

Solução

Observe que o domínio de F é IR, pois, $f(t)=\frac{3}{1+t^4}$ é contínua em IR. Pelo teorema fundamental do cálculo

$$F'(x)=\left[\int_1^x f(t)\,dt\right]=f(x)$$

ou seja,

$$F'(x)=\frac{3}{1+x^4}.$$

Na notação de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{3}{1+t^4}\,dt\right)=\frac{3}{1+x^4}.$$

EXEMPLO 2. Calcule $\frac{d}{du}\left(\int_0^u \operatorname{sen} t^2\,dt\right)$.

Solução

Seja $f(t)=\operatorname{sen} t^2$. Temos:

$$\frac{d}{du}\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)=f(u)$$

ou seja,

$$\frac{d}{du}\left(\int_0^u \operatorname{sen} t^2\,dt\right)=\operatorname{sen} u^2.$$

EXEMPLO 3. Calcule $G'(x)=\int_1^{x^2} \frac{3}{1+t^4}\,dt$.

Solução

$$G(x)=F(x^2) \text{ onde } F(x)=\int_1^x \frac{3}{1+t^4}\,dt.$$

De

$$G'(x)=F'(x^2)\,2x \quad \text{e} \quad F'(x)=\frac{3}{1+x^4}$$

resulta

$$G'(x)=\frac{6x}{1+x^8}.$$

Podemos, também, calcular $G'(x)$ da seguinte forma:

$$G(x)=\int_1^u \frac{3}{1+t^4}\,dt \quad \text{onde } u=x^2;$$

$$\frac{dG}{dx}=\frac{d}{du}\left(\int_1^u \frac{3}{1+t^4}\,dt\right)\frac{du}{dx}=\frac{3}{1+u^4}\cdot 2x.$$

Portanto,

$$G'(x)=\frac{6x}{1+x^8}.$$

EXEMPLO 4. Calcule $H'(x)$ sendo $H(x)=\int_{\operatorname{sen} x}^{x^3} \frac{3}{1+t^4}\,dt.$

Solução

Como $f(t)=\frac{3}{1+t^4}$ é contínua em IR, tomando-se um número real qualquer, por exemplo 1, tem-se, para todo x,

$$H(x)=\int_{\operatorname{sen} x}^{1} \frac{3}{1+t^4}\,dt+\int_1^{x^3} \frac{3}{1+t^4}\,dt$$

ou

$$H(x) = \int_1^{x^3} \frac{3}{1+t^4}\,dt - \int_1^{\text{sen } x} \frac{3}{1+t^4}\,dt;$$

daí

$$H'(x) = \frac{3}{1+(x^3)^4}(x^3)' - \frac{3}{1+(\text{sen } x)^4}(\text{sen } x)'$$

ou seja,

$$H'(x) = \frac{9x^2}{1+x^{12}} - \frac{3\cos x}{1+\text{sen}^4 x}.$$

Uma outra forma para se obter $H'(x)$ é a seguinte: como $f(t) = \dfrac{3}{1+t^4}$ é contínua em IR, f admite uma primitiva F; assim

$$H(x) = \int_{\text{sen } x}^{x^3} \frac{3}{1+t^4}\,dt = \left[F(t)\right]_{\text{sen } x}^{x^3}$$

ou seja,

$$H(x) = F(x^3) - F(\text{sen } x)$$

daí

$$H'(x) = F'(x^3)\,3x^2 - F'(\text{sen } x)\cos x.$$

Como

$$F'(t) = \frac{3}{1+t^4}$$

segue

$$H'(x) = \frac{9x^2}{1+x^{12}} - \frac{3\cos x}{1+\text{sen}^4 x}.$$

EXEMPLO 5. Suponha $f(t)$ contínua em $[-r, r]$ $(r > 0)$ e considere a função

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [-r, r].$$

Prove que se f for uma função par, então F será ímpar.

Solução

A nossa hipótese é de que f é contínua em $[-r, r]$ e $f(t) = f(-t)$ em $[-r, r]$. Queremos provar que

$$F(-x) = -F(x) \text{ em } [-r, r].$$

Como $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ e f é contínua em $[-r, r]$, pelo teorema fundamental do cálculo

$$F'(x) = f(x) \text{ em } [-r, r].$$

Temos, também,

$$[F(-x)]' = F'(-x)(-x)' = -F'(-x)$$

ou seja,

$$[F(-x)]' = -f(-x), \text{ pois } F' = f.$$

Segue que, para todo x em $[-r, r]$,

$$[F(x) + F(-x)]' = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x)$$

ou seja,

$$[F(x) + F(-x)]' = 0.$$

Logo, existe uma constante k tal que, para todo x em $[-r, r]$, $F(x) + F(-x) = k$. Mas $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ e, assim, $k = F(0) + F(-0) = 0$. Portanto, $F(x) + F(-x) = 0$ ou $F(-x) = -F(x)$, para todo $x \in [-r, r]$.

Exercícios 2.4

1. Calcule $F'(x)$ sendo F dada por

a) $F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{3t}{1+t^6}\,dt$ b) $F(x) = \int_2^x \text{sen } t^2\,dt$

c) $F(x) = \int_x^2 \cos t^4\,dt$ d) $F(x) = \int_1^{x^2} \text{sen } t^2\,dt$

e) $F(x) = \int_0^{2x} \cos t^2\,dt$ f) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{5+t^4}\,dt$

g) $F(x) = x^3 \int_1^x e^{-s^2}\,ds$ h) $F(x) = \int_0^x x^2 e^{-s^2}\,ds$

i) $F(x) = \int_x^1 \text{arc tg } t^3 \, dt$ *j)* $F(x) = \int_0^x (x - t)\, e^{-t^2} \, dt$

2. Suponha $f(t) \geqslant 0$ e contínua em IR. Estude a função $F(x) = \int_1^{x^3 + 3x^2} f(t)\, dt$ com relação a crescimento e decrescimento.

3. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, tal que para todo x

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x t\, \varphi(t)\, dt.$$

4. Suponha f contínua em $[-r, r]$ $(r > 0)$ e considere a função

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Prove que se f for uma função ímpar, então F será uma função par.

5. Suponha f contínua em IR e periódica com período p, isto é, $f(x) = f(x + p)$ para todo x. Prove que a função

$$g(x) = \int_x^{x+p} f(t)\, dt, \; x \in R$$

é constante. Interprete graficamente.

6. Calcule $\int_0^1 F(x)\, dx$ onde $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\, dt$. (*Sugestão*: integre por partes.)

7. Calcule $\int_0^\pi G(x)\, dx$ onde $G(x) = \int_\pi^x \text{sen } t^2 \, dt$.

8. As funções *cosseno hiperbólico* e *seno hiperbólico*, que se indicam, respectivamente, por ch e sh, são dadas por

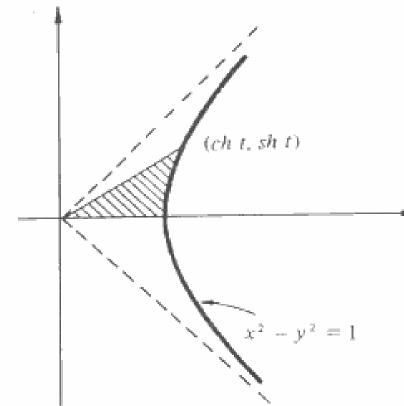
$$ch\, t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad sh\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

a) Verifique que para todo t, $(ch\, t)' = sh\, t$.

b) Verifique que, para todo t, o ponto $(ch\, t, sh\, t)$ pertence ao ramo da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ contido no semiplano $x > 0$.

c) Sendo $F(t)$ a área da região hachurada mostre que

$$F(t) = \frac{1}{2}\, ch\, t\, sh\, t - \int_1^{ch\, t} \sqrt{x^2 - 1}\, dx \text{ para } t \geqslant 0. \text{ Calcule } F'(t).$$



d) Prove que $F(t) = \dfrac{t}{2}$, $t \geqslant 0$.

e) Qual é, então, a interpretação para o parâmetro t que ocorre em $ch\, t$? Compare com o parâmetro t que ocorre em $\cos t$.

2.5. Função Dada por uma Integral: Continuidade e Derivabilidade

Nesta seção vamos estudar, com relação a continuidade e derivabilidade, a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in I,$$

onde f é suposta integrável em todo intervalo fechado contido em I e, portanto, não necessariamente contínua em I.

> ***Teorema 1.*** Seja f integrável em qualquer intervalo fechado contido no intervalo I e seja a um ponto fixo de I. Então a função dada por
>
> $$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in I,$$
>
> é *contínua* em I.

Demonstração

Seja $p \in I$; existe um intervalo $[\alpha, \beta] \subset I$ tal que $a, p \in [\alpha, \beta]$ e se p não for extremo de I, podemos tomar α e β de modo que $p \in \,]\alpha, \beta[$. Como f é limitada em $[\alpha, \beta]$, pois é integrável neste intervalo, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leqslant M$ em $[\alpha, \beta]$. Para todo x em $[\alpha, \beta]$ temos

$$F(x) - F(p) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^p f(t)\, dt = \int_p^x f(t)\, dt.$$

De $-M \leq f(t) \leq M$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$, segue que, para todo $x \in [\alpha, \beta]$,

$$-M(x-p) \leq \int_p^x f(t)\,dt \leq M(x-p), \text{ se } x \geq p,$$

e

$$-M(x-p) \leq \int_x^p f(t)\,dt \leq M(p-x), \text{ se } x \geq p.$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x \to p} F(x) = F(p). \quad ■$$

> ***Teorema 2.*** Sejam f e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ como no teorema 1. Nestas condições, se f for contínua em $p \in I$, então F será derivável em p e $F'(p) = f(p)$.

Demonstração

Seja $p \in I$ e suponhamos que p não seja extremo de I. Vamos provar que se f for contínua em p então

$$\lim_{x \to p} \frac{F(x) - F(p) - f(p)(x-p)}{x-p} = 0$$

que equivale a

$$F'(p) = \lim_{x \to p} \frac{F(x) - F(p)}{x-p} = f(p).$$

Temos

① $F(x) - F(p) - f(p)(x-p) = \int_p^x f(t)\,dt - \int_p^x f(p)\,dt = \int_p^x [f(t) - f(p)]\,dt.$

Sendo f contínua em p, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, com $]p-\delta, p+\delta[\subset I$, tal que

$$p - \delta < t < p + \delta \Rightarrow -\epsilon < f(t) - f(p) < \epsilon;$$

daí, para todo x em $]p-\delta, p+\delta[$,

② $-\epsilon\,|x-p| < \int_p^x [f(t) - f(p)]\,dt < \epsilon\,|x-p|.$

De ① e ② resulta

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(p) - f(p)(x-p)}{x-p} \right| < \epsilon$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to p} \frac{F(x) - F(p) - f(p)(x-p)}{x-p} = 0.$$

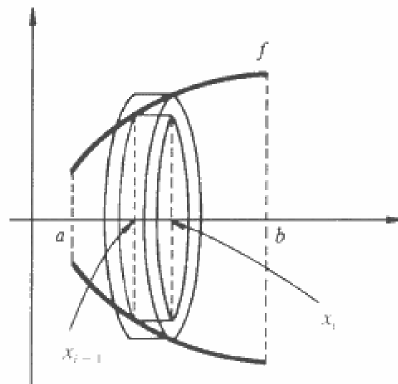
Analise você o caso em que p é extremo de I. ■

3

MAIS ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL. COORDENADAS POLARES

3.1. VOLUME DE SÓLIDO OBTIDO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO x, DE UM CONJUNTO A

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$; seja B o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = f(x)$. Estamos interessados em definir o *volume* V de B.



Seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam, respectivamente, $\bar{c}_i$ e $\bar{\bar{c}}_i$ pontos de mínimo e de máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Na figura acima, $\bar{c}_i = x_{i-1}$ e $\bar{\bar{c}}_i = x_i$. Temos:

$\pi [f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i$ = volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio $f(\bar{c}_i)$ (cilindro de "dentro")

$\pi [f(\bar{\bar{c}}_i)]^2 \Delta x_i$ = volume do cilindro de altura Δx_i e raio de base $f(\bar{\bar{c}}_i)$ (cilindro de "fora").

Uma boa definição para o volume V de B deverá implicar

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\bar{c}_i)\right]^2 \Delta x_i \leq \text{volume } V \leq \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\bar{\bar{c}}_i)\right]^2 \Delta x_i$$

para toda partição P de $[a, b]$. Para máx $\Delta x_i \to 0$, as somas de Riemann que comparecem nas desigualdades acima tendem a $\int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 dx$; nada mais natural, então, do que definir o *volume V de B* por

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

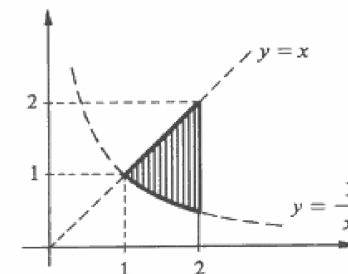
EXEMPLO 1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$ $(r > 0)$.

Solução

$x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$, é um semicírculo de raio r. Pela rotação deste semicírculo, em torno do eixo Ox, obtemos uma esfera de raio r. Temos

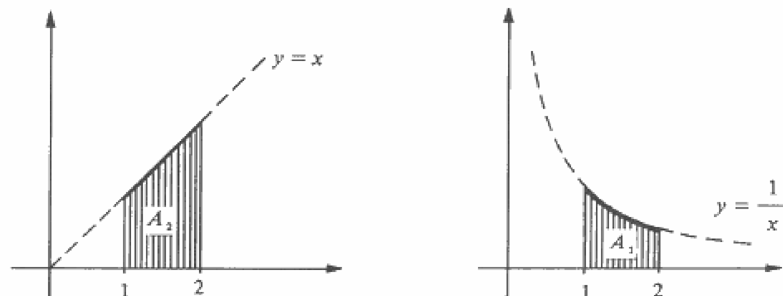
$$\begin{aligned}
\text{volume} &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\
&= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx \\
&= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3.
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Ox, do conjunto de todos (x, y) tais que $\frac{1}{x} \leq y \leq x$, $1 \leq x \leq 2$.



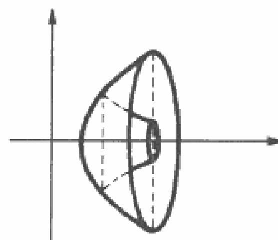
Solução

O que queremos é o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto hachurado. O volume V pedido é igual a $V_2 - V_1$ onde V_2 e V_1 são, respectivamente, os volumes obtidos pela rotação em torno do eixo Ox dos conjuntos A_2 e A_1 hachurados.



$$V_2 = \pi \int_1^2 x^2\, dx = \frac{7\pi}{3} \text{ e } V_1 = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

Deste modo, $V = \dfrac{7\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{11\pi}{6}$.



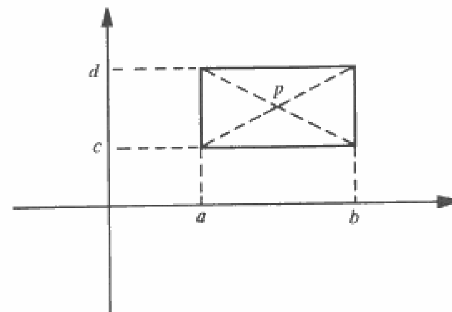
O próximo exemplo é um caso particular do Teorema de Papus (Papus de Alexandria, IV século d.C.) para volume de sólido obtido pela rotação, em torno de um eixo, de uma figura plana que não intercepta o eixo. (Veja Exerc. 3 da Seç. 3.6.)

EXEMPLO 3. Considere um retângulo situado no semiplano $y \geqslant 0$ e com um lado paralelo ao eixo x. Seja P a intersecção das diagonais. Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, é igual ao produto da área do retângulo pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo ponto P.

Solução

Consideremos o retângulo

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{e} \quad 0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d$$



O volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, deste retângulo é

$$V = \pi \int_a^b d^2\, dx - \pi \int_a^b c^2\, dx$$

ou seja,

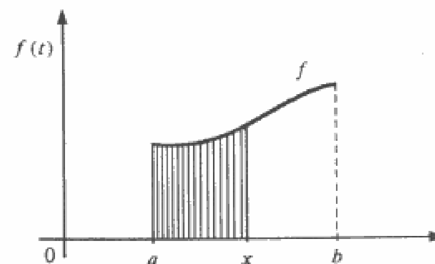
$$V = \pi\,(d^2 - c^2)(b - a)$$

e, portanto,

$$V = 2\pi \frac{d + c}{2}(d - c)(b - a)$$

onde $2\pi \dfrac{d+c}{2}$ é o comprimento da circunferência gerada pelo ponto P e $(d - c)\,(b - a)$ a área do retângulo. (Observe que o resultado expresso neste exemplo continua válido se as expressões "semiplano $y \geqslant 0$" e "em torno do eixo x" forem substituídas, respectivamente, por "semiplano $x \geqslant 0$" e "em torno do eixo y".)

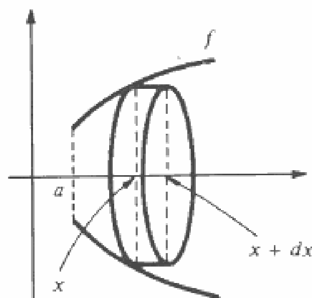
Seja $f(t) \geqslant 0$ e contínua em $[a, b]$; para cada x em $[a, b]$, $V(x) = \pi \int_a^x [f(t)]^2\, dt$ é o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Ot, do conjunto hachurado. Pelo teorema fundamental do cálculo



$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\pi \int_a^x [f(t)]^2\, dt\right] = \pi\,[f(x)]^2.$$

Assim, a diferencial da função $V = V(x)$ é

$$dV = \pi [f(x)]^2 dx.$$



$\pi [f(x)]^2 dx$ é um valor aproximado para a variação ΔV em V correspondente à variação dx em x.

Exercícios 3.1

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que

   a) $1 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq x$.

   b) $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$.

   c) $1 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

   d) $2x^2 + y^2 \leq 1$ e $y \geq 0$.

   e) $y \geq 0$, $1 \leq x \leq 2$ e $x^2 - y^2 \geq 1$.

   f) $0 \leq x \leq 1$ e $\sqrt{x} \leq y \leq 3$.

   g) $x^2 \leq y \leq x$.

   h) $0 \leq y \leq x$ e $x^2 + y^2 \leq 2$.

   i) $y \geq x^2$ e $x^2 + y^2 \leq 2$.

   j) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 0$.

   l) $\frac{1}{x} \leq y \leq 1$ e $1 \leq x \leq 2$.

   m) $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$

2. (*Teorema de Papus para a elipse*). Considere o conjunto A de todos os pontos (x, y) tais que

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} \leq 1 \qquad (a > 0 \text{ e } b > 0)$$

   e situado no semiplano $y \geq 0$. Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A é igual ao produto da área da elipse pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo centro (α, β) desta elipse.

3. Considere um triângulo isósceles situado no semiplano $y \geq 0$ e com a base paralela ao eixo x. Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação deste triângulo, em torno do eixo x, é igual ao produto da área deste triângulo pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo baricentro do triângulo.

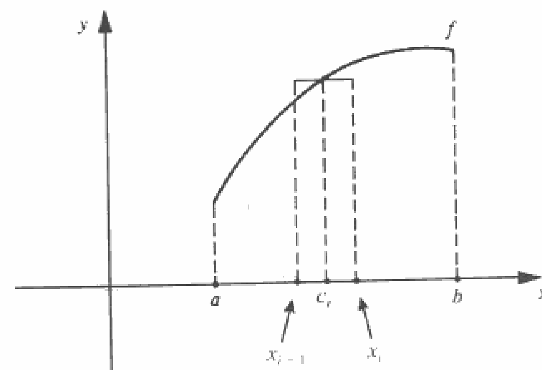
3.2. Volume de Sólido Obtido pela Rotação, em Torno do Eixo y, de um Conjunto A

Suponha $f(x) \geq 0$ e contínua em $[a, b]$, com $a > 0$. Seja A o conjunto do plano de todos os pares (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq f(x)$. Seja B o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto A. Nosso objetivo, a seguir, é mostrar que é razoável tomar para volume de B o número

① $$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx}$$

Seja então

$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e seja c_i o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$.



Seja R_i o retângulo $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ e $0 \leq y \leq f(c_i)$. Pelo teorema de Papus para retângulo, o volume do sólido gerado pela rotação do retângulo R_i, em torno do eixo y, é

$$\boxed{2\pi c_i\, f(c_i)\, \Delta x_i} \qquad \text{(Confira.)}$$

Deste modo, a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i\, f(c_i) \Delta x_i$$

é um valor aproximado para o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto A. Por outro lado, pelo fato de f ser contínua, tem-se

$$\lim_{\text{máx}\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Logo, é razoável tomar ① para volume de B. Veremos no Vol. 3 que esta nossa atitude é correta. (Para uma prova de ①, num caso particular, veja Exercício 2 desta seção.)

EXEMPLO. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos (x, y) tais que

$$0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x - x^3.$$

Solução

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)\, dx = \frac{2}{15}.$$

Exercícios 3.2

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os (x, y) tais que

   a) $1 \leq x \leq e$ e $0 \leq y \leq \ln x$.

   b) $0 \leq x \leq 8$ e $0 \leq y \leq \sqrt[3]{x}$.

   c) $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq x^3 - 1$.

   d) $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \operatorname{sen} x$.

   e) $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \operatorname{arc\,tg} x$.

   f) $1 \leq x \leq 4$ e $1 \leq y \leq \sqrt{x}$.

   g) $y^2 \leq 2x - x^2$, $y \geq 0$.

   h) $0 \leq x \leq 2$, $y \geq \sqrt{x-1}$ e $0 \leq y \leq x^2$.

2. (*Volume de sólido de revolução em torno do eixo y*). Suponha f estritamente crescente e com derivada contínua em $[a, b]$, $a \geq 0$ e $f(a) = 0$. Seja $g : [0, f(b)] \to [a, b]$ a função inversa de f.

   a) Verifique que o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto

   $$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \text{ é igual a } \pi b^2 f(b) - \pi \int_0^{f(b)} [g(y)]^2\, dy.$$

   b) Mostre que

   $$\pi b^2 f(b) - \pi \int_0^{f(b)} [g(y)]^2\, dy = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

   (*Sugestão:* faça a mudança de variável $y = f(x)$ e depois integre por partes).

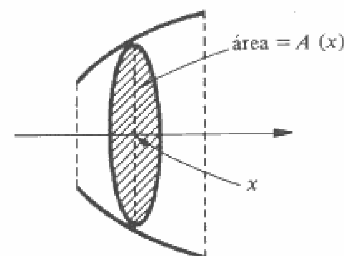
   c) Conclua que o volume mencionado em a é

   $$\boxed{\text{volume} = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx}$$

3.3. Volume de um Sólido Qualquer

Vimos no parágrafo anterior que $\pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$ é a fórmula que nos fornece o volume do *sólido de revolução* obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Observe que

$$A(x) = \pi [f(x)]^2$$



é a área da *interseção do sólido com o plano perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto de abscissa x*. Assim, o volume mencionado anteriormente pode ser colocado na forma

$$\boxed{\text{volume} = \int_a^b A(x)\, dx}$$

Seja, agora, B um sólido qualquer, não necessariamente de revolução e seja Ox um eixo escolhido arbitrariamente. Suponhamos que o sólido esteja compreendido entre dois planos perpendiculares a Ox, que interceptam o eixo Ox em $x = a$ e em $x = b$. Seja $A(x)$ a área da interseção do sólido com o plano perpendicular a Ox no ponto de abscissa x. Suponhamos que a função $A(x)$ seja integrável em $[a, b]$. Definimos, então, o volume do sólido por

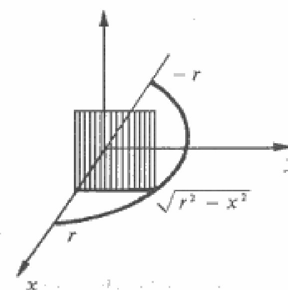
$$\boxed{\text{volume} = \int_a^b A(x)\, dx}$$

EXEMPLO. Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo Ox são quadrados.

Solução

$$A(x) = (\sqrt{r^2 - x^2})^2.$$

$$\text{volume} = \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$



ou seja

$$\text{volume} = 2\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = 2\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{4r^3}{3}.$$

Exercícios 3.3

1. Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo Ox são triângulos equiláteros.

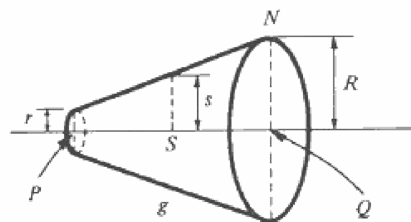
2. Calcule o volume do sólido cuja base é a região $4x^2 + y^2 \leq 1$ e cujas secções perpendiculares ao eixo Ox são semicírculos.

3. Calcule o volume do sólido cuja base é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ e cujas secções perpendiculares ao eixo Ox são triângulos isósceles de altura $x - x^2$.

4. Calcule o volume do sólido cuja base é um triângulo equilátero de lado l e cujas secções perpendiculares a um dos lados são quadrados.

3.4. Área de Superfície de Revolução

Sabe-se da geometria que a área lateral de um tronco de cone circular reto, de geratriz g, raio da base maior R e raio da base menor r, é igual à área do trapézio de altura g, base maior $2\pi R$ e base menor $2\pi r$:



$$\text{área lateral do tronco} = \pi(R + r)\,g$$

Sendo S o ponto médio do segmento PQ,

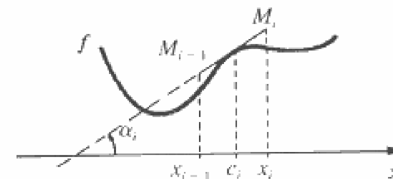
$$s = \frac{R + r}{2}, \text{ daí } \pi(R + r)\,g = 2\pi s g.$$

$$\boxed{\text{área lateral do tronco de cone} = 2\pi s\,g}$$

Observe que a área da superfície gerada pela rotação da geratriz, em torno do eixo PQ, é igual ao produto do comprimento g desta geratriz pelo comprimento $2\pi s$ da circunferência gerada pelo ponto médio da geratriz. Este resultado é um caso particular do Teorema de Papus para superfícies de revolução. (Veja Exercício 9 da Seç. 3.6.)

Vamos, agora, estender o conceito de área para superfície obtida pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de uma função f, com derivada contínua e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

Seja, então, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e $c_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



Na figura, $f'(c_i) = \operatorname{tg} \alpha_i$; o segmento $M_{i-1}M_i$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(c_i, f(c_i))$. Então

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \frac{\Delta x_i}{|\cos \alpha_i|} = |\sec \alpha_i|\,\Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

A área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do segmento $M_{i-1}M_i$ (observe que tal superfície nada mais é do que a superfície lateral de um tronco de cone de geratriz $\overline{M_{i-1}M_i}$) é:

$$2\pi\,f(c_i)\,\overline{M_{i-1}M_i} = 2\pi\,f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$$

e se Δx_i for suficientemente pequeno esta área será uma boa aproximação para a "área" da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do trecho do gráfico entre as retas $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$.

Como a função $2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ é contínua em $[a, b]$, teremos

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\,f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b 2\pi\,f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Definimos a *área* da superfície obtida pela rotação do gráfico de f, em torno do eixo x, por

$$\boxed{2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}$$

EXEMPLO. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Solução

$$\text{área} = 2\pi\int_0^\pi \text{sen}\,x\sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$$

$u = \cos x$; $du = -\text{sen}\,x\,dx$
$x = 0$; $u = 1$
$x = \pi$; $u = -1$.

$$= 2\pi \int_{1}^{-1} \sqrt{1+u^2}\,(-du)$$

$u = \text{tg}\,\theta;\ du = \sec^2\theta\,d\theta$
$u = -1;\ \theta = -\dfrac{\pi}{4}$
$u = 1;\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta.$$

Integrando por partes:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta\sec\theta\,d\theta = \Big[\,tg\,\theta\sec\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sec^3\theta - \sec\theta]\,d\theta.\ \text{Daí}$$

$$2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta = 2\sqrt{2} + \Big[\ln(\sec\,\theta + \text{tg}\,\theta)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

ou seja,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1).$$

Portanto, área $= 2\pi\,(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]$.

Exercícios 3.4

1. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da função dada.

   a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ -1 \leq x \leq 1$

   b) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},\ -R \leq x \leq R\ (R > 0)$

   c) $y = x^2,\ 0 \leq x < \dfrac{1}{2}.$

   d) $y = \sqrt{x},\ 1 \leq x \leq 4.$

2. Seja f com derivada contínua em $[a, b]$ e seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Indique por $L(P)$ o comprimento da poligonal de vértices $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

   a) Verifique que

   $$\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} L(P) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

   b) Defina *comprimento* do gráfico da função de f.

   c) Qual uma outra motivação para tal definição? (*Sugestão:* aproveite a motivação para a definição de área de superfície de revolução.)

3. Calcule o comprimento do gráfico da função dada.

   a) $f(x) = \ln x,\ 1 \leq x \leq e$

   b) $f(x) = e^x,\ 0 \leq x \leq 1.$

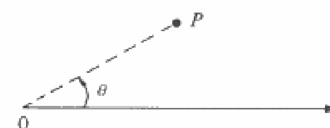
   c) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},\ -R \leq x \leq R,\ R > 0$

   d) $f(x) = \sqrt{x},\ \dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}$

   e) $f(x) = x^2,\ 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$

3.5. Área em Coordenadas Polares

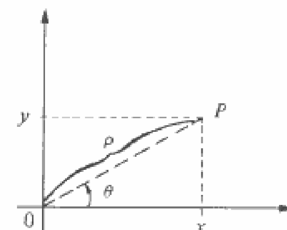
Fixado no plano um semi-eixo Ox (tal semi-eixo denomina-se *eixo polar* e o ponto O, *pólo*)



cada ponto P do plano fica determinado por suas *coordenadas polares* (θ, ρ), onde θ é a medida em radianos do ângulo entre o segmento OP e o eixo polar (tal ângulo sendo contado a partir do eixo polar) e ρ o comprimento de OP; assim $\rho \geq 0$.

Se considerarmos no plano um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas (o habitual) em que a origem coincide com o pólo e o semi-eixo Ox com o eixo polar e se (θ, ρ) forem as coordenadas polares de P, então as suas coordenadas cartesianas serão dadas por

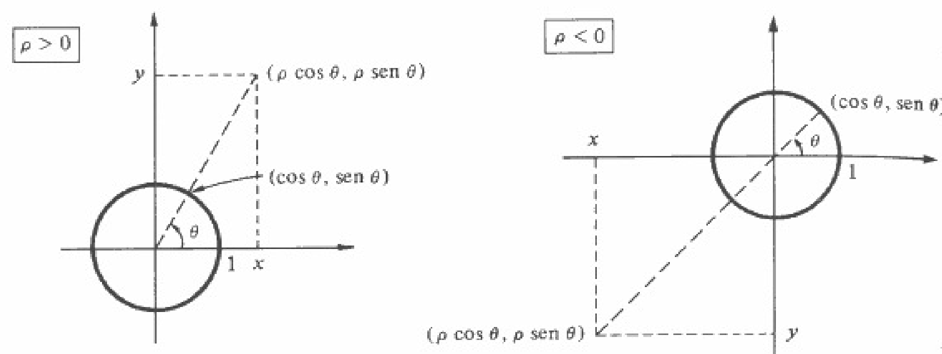
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$



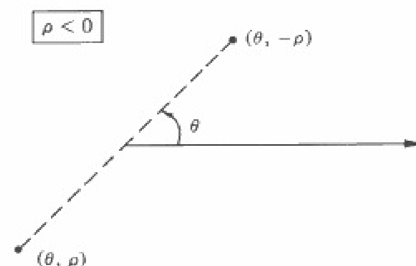
Observe que se P não coincide com o pólo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Até agora, destacamos ρ como um número positivo. Entretanto, para as aplicações é importante que ρ possa assumir, também, valores negativos. Vejamos como interpretar (θ, ρ) no caso $\rho < 0$:



Se $\rho < 0$, (θ, ρ) *é o simétrico, em relação ao pólo, do ponto* $(\theta, -\rho)$.

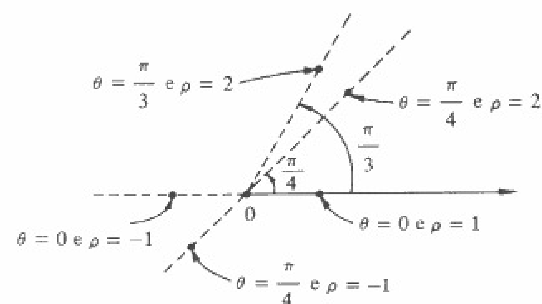


EXEMPLO 1. Represente no plano o ponto (θ, ρ) onde

a) $\theta = 0$ e $\rho = 1$ *b)* $\theta = 0$ e $\rho = -1$ *c)* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ e $\rho = 2$

d) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ e $\rho = -1$ *e)* $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ e $\rho = 2$

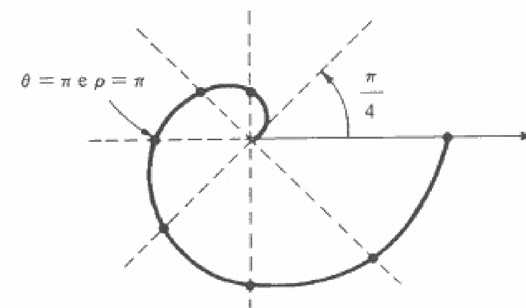
Solução



EXEMPLO 2. Um ponto P desloca-se no plano de modo que a relação entre suas coordenadas polares é dada por $\rho = \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Desenhe o lugar geométrico descrito por P.

Solução

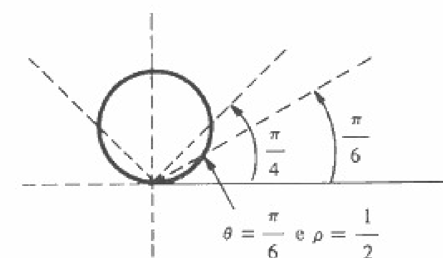
θ	ρ
0	0
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}$
π	π
$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}$
2π	2π



EXEMPLO 3. Desenhe a curva cuja equação, em coordenadas polares, é $\rho = \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Solução

θ	ρ
0	0
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{\pi}{2}$	1
$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
π	0



Observe que para $\rho \neq 0$

$$\rho = \operatorname{sen} \theta \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \operatorname{sen} \theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y.$$

$x^2 + y^2 - y = 0$ é a equação de uma circunferência de centro $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ e raio $\dfrac{1}{2}$. Deste modo, $\rho = \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, é, em coordenadas polares, a equação de tal circunferência.

EXEMPLO 4. Desenhe o lugar geométrico de equação (em coordenadas polares) $\rho = 1 - \cos \theta$.

Solução

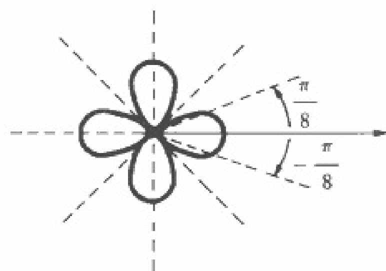
θ	ρ
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	1

Esta curva denomina-se *cardióide*.

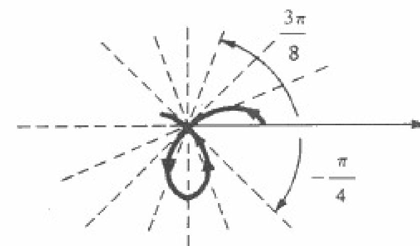
EXEMPLO 5. Desenhe a curva cuja equação, em coordenadas polares, é $\rho = \cos 2\theta$.

Solução

θ	ρ
0	1
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	0
$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$



Veja como fica o trecho da curva acima para θ variando de 0 a $\frac{3\pi}{4}$.



Quando θ varia de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{4}$, ρ permanece negativo.

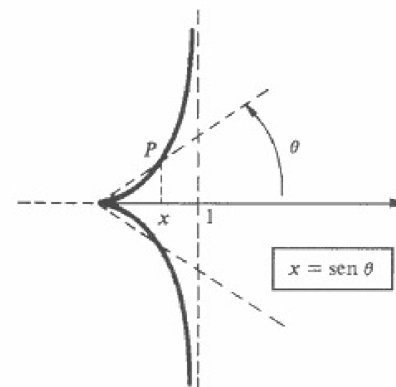
EXEMPLO 6. Desenhe o lugar geométrico descrito por um ponto P que se desloca no plano, sabendo que a relação entre suas coordenadas polares é $\rho = |\text{tg}\ \theta|$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Solução

Vejamos, primeiro, o que acontece para θ variando de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Quando $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $\rho \to +\infty$. A projeção de P sobre o eixo polar tem abscissa

$$x = \rho \cos \theta = \text{tg}\ \theta \cos \theta = \text{sen}\ \theta.$$

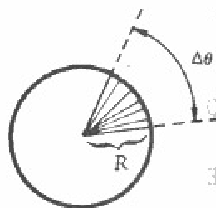
Assim, quando $\theta \to \frac{\pi}{2}$, a projeção de P sobre o eixo polar tende para o ponto de abscissa 1. O trecho da curva correspondente a θ em $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ é simétrico, em relação ao eixo polar, ao trecho correspondente a θ em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Nosso objetivo, a seguir, é estabelecer uma fórmula para o cálculo de área de região limitada por curvas dadas em coordenadas polares.

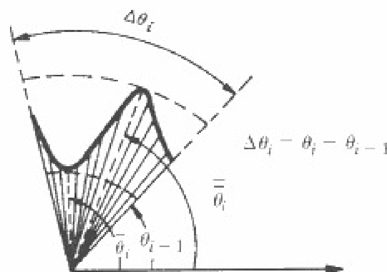
Inicialmente, observamos que a área de um setor circular de raio R e abertura $\Delta\theta$ é $\frac{1}{2} R^2 \Delta\theta$. Esta área se determina por uma regra de três simples:

$2\pi rd$ — área πR^2
$\Delta\theta\, rd$ — ?



$$? = \frac{\Delta\theta\, \pi R^2}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2\, \Delta\theta$$

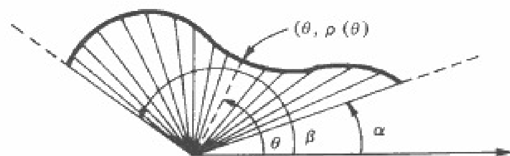
Consideremos, agora, a função $\rho = \rho(\theta)$ contínua e ≥ 0 em $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Seja A_i o conjunto de todos os pontos (θ, ρ), com $\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i$ e $0 \leq \rho \leq \rho(\theta)$.



Seja $\bar{\bar{\rho}} = \rho(\bar{\bar{\theta}}_i)$ o maior valor de ρ em $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ e $\bar{\rho} = \rho(\bar{\theta}_i)$ o menor valor. A área do conjunto A_i está, então, compreendida entre as áreas dos setores circulares de abertura $\Delta\theta_i$ e raios $\rho(\bar{\theta}_i)$ e $\rho(\bar{\bar{\theta}}_i)$:

$$\frac{1}{2}\left[\rho(\bar{\theta}_i)\right]^2 \Delta\theta_i \leq \text{área } A_i \leq \frac{1}{2}\left[\rho(\bar{\bar{\theta}}_i)\right]^2 \Delta\theta_i.$$

Consideremos, agora, a função $\rho = \rho(\theta)$ contínua e ≥ 0 em $[\alpha, \beta]$, onde supomos $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Seja A o conjunto de todos os pontos do plano de coordenadas polares (θ, ρ) satisfazendo as condições: $\alpha \leq \theta \leq \beta$ e $0 \leq \rho \leq \rho(\theta)$.



Seja $P: \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_n = \beta$ uma partição de $[\alpha, \beta]$. Sejam $\rho(\bar{\theta}_i)$ e $\rho(\bar{\bar{\theta}}_i)$ os valores mínimo e máximo de ρ em $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Pelo que vimos anteriormente, a área da parte do conjunto A compreendida entre as retas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ está compreendida entre as áreas dos setores circulares de abertura $\Delta\theta_i$ e raios $\rho(\bar{\theta}_i)$ e $\rho(\bar{\bar{\theta}}_i)$. Uma definição razoável para a área de A deverá implicar, para toda partição P de $[\alpha, \beta]$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[\rho(\bar{\theta}_i)]^2\, \Delta\theta_i \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[\rho(\bar{\bar{\theta}}_i)]^2\, \Delta\theta_i.$$

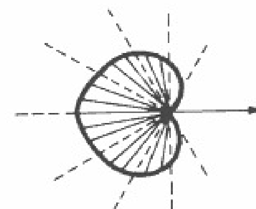
Para máx $\Delta\theta_i \to 0$, as somas de Riemann acima tendem para a integral $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta$. Nada mais natural, então, do que definir a *área de A* por

$$\boxed{\text{área } A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\, d\theta}$$

EXEMPLO 1. Calcule a área da região limitada pela cardióide $\rho = 1 - \cos\theta$.

Solução

Para cobrir todo o conjunto, θ deverá variar de 0 a 2π.



$$\text{área} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\, d\theta.$$

Temos

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} [1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta]\, d\theta = 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta =$$
$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] d\theta = 3\pi$$

Assim, a área do conjunto é $\frac{3\pi}{2}$.

EXEMPLO 2. Calcule a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas (coordenadas polares) $\rho = 3\cos\theta$ e $\rho = 1 + \cos\theta$.

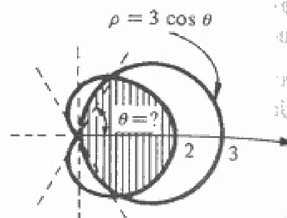
Solução

Primeiro devemos determinar as interseções das curvas.

$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta$$

ou seja,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}.$$



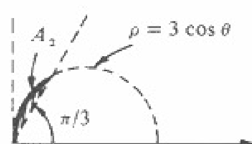
Assim, $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\theta = -\frac{\pi}{3}$ resolvem o problema. Seja A_1 o conjunto de todos (θ, ρ) com $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$ e $0 \leqslant \rho \leqslant 1 + \cos\theta$ e seja A_2 o conjunto de todos (θ, ρ) com $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ e $0 \leqslant \rho \leqslant 3\cos\theta$. Temos, então:

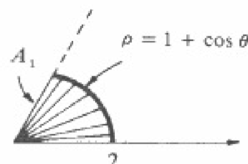
$$\text{área pedida} = 2\,(\text{área } A_1 + \text{área } A_2).$$

$$\text{área } A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos\theta)^2\, d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{área } A_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Conclusão: área pedida $= \frac{5\pi}{4}$. Veja figuras a seguir.





EXEMPLO 3. Calcule a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares por $\rho = \operatorname{tg}\theta$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$, pela reta $x = 1$ (coordenadas cartesianas) e pelo eixo polar.

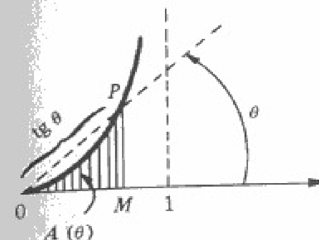
Solução

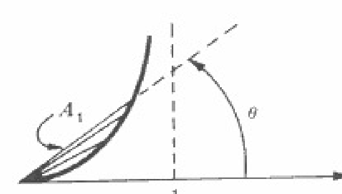
Indiquemos por $A(\theta)$ a área da região hachurada. A área que queremos é:

$$\text{área} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} A(\theta).$$

Temos

$$A(\theta) = \text{área } \Delta \text{ OPM} - \text{área } A_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta.$$





Vamos calcular $\int_0^{\theta} \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta$. Temos

$$\int_0^{\theta} \operatorname{tg}^2\theta\, d\theta = \int_0^{\theta} (\sec^2\theta - 1)\, d\theta = [\operatorname{tg}\theta - \theta]_0^{\theta} = \operatorname{tg}\theta - \theta.$$

Assim

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\,(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta.$$

Portanto,

$$\text{área} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{\pi}{4}.$$

Observação: No triângulo OPM temos:

$$\overline{OM} = \rho\cos\theta = \operatorname{tg}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}\theta \text{ e } \overline{MP} = \rho\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tg}\theta\operatorname{sen}\theta.$$

Assim, área Δ OPM $= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{tg}\theta$.

Exercícios 3.5

1. Desenhe a curva dada (coordenadas polares).

a) $\rho = e^{-\theta}$, $\theta \geqslant 0$
b) $\rho = \cos\theta$
c) $\rho\cos\theta = 1$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
d) $\rho = 2$
e) $\theta = \frac{\pi}{4}$
f) $\rho = \operatorname{tg}\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
g) $\rho = \cos 3\theta$
h) $\rho^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2\theta}$
i) $\rho = 2 - \cos\theta$
j) $\rho = 1 - \operatorname{sen}\theta$
l) $\rho = \cos 4\theta$
m) $\rho^2 = \operatorname{tg}\theta$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ $(\rho \geqslant 0)$
n) $\rho^2 = \operatorname{tg} 2\theta$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{4}$ $(\rho \geqslant 0)$
o) $\rho = \cos^2\theta$

2. Passe a curva dada para coordenadas polares e desenhe-a.

$a)$ $x^4 - y^4 = 2xy$ $\qquad$ $b)$ $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = y^2$

$c)$ $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $d)$ $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

3. Calcule a área da região limitada pela curva dada (coordenadas polares).

$a)$ $\rho = 2 - \cos\theta$ $\qquad$ $b)$ $\rho^2 = \cos\theta$ $(\rho \geq 0)$

$c)$ $\rho = \cos 2\theta$ $\qquad$ $d)$ $\rho = \cos 3\theta$

4. Calcule a área da intersecção das regiões limitadas pelas curvas dadas em coordenadas polares.

$a)$ $\rho = 2 - \cos\theta$ e $\rho = 1 + \cos\theta$ $\qquad$ $b)$ $\rho = \text{sen}\,\theta$ e $\rho = 1 - \cos\theta$

$c)$ $\rho = 3$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$ $\qquad$ $d)$ $\rho^2 = \cos\theta$ e $\rho^2 = \text{sen}\,\theta$ $(\rho \geq 0)$

$e)$ $\rho = \cos\theta$ e $\rho = \text{sen}\,\theta$ $\qquad$ $f)$ $\rho = 1$ e $\rho = 2(1 - \cos\theta)$

5. Calcule a área do conjunto de todos os pontos (θ, ρ) tais que $\theta^2 \leq \rho \leq \theta$ (coordenadas polares).

6. Calcule a área da região situada no 1.º quadrante, limitada acima pela curva $x^4 - y^4 = 2xy$ (coordenadas cartesianas) e abaixo por $\rho^2 = 2\,\text{sen}\,2\theta$ (coordenadas polares), com $\rho \geq 0$.

7. $a)$ Escreva, em coordenadas polares, a equação da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tomando como pólo a origem e como eixo polar o semi-eixo Ox.

$b)$ Escreva, em coordenadas polares, a equação da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tomando como pólo o foco $F = (c, 0)$, $c > 0$, e como eixo polar a semi-reta FA onde $A = (a, 0)$, $a > 0$. (Faça $e = \dfrac{c}{a}$ e $\rho = a - ec$.)

8. Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos do plano e seja k a metade da distância de F_1 a F_2. O lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = k^2$ denomina-se *lemniscata* de focos F_1 e F_2.

$a)$ Tomando-se $F_1 = (-k, 0)$ e $F_2 = (k, 0)$, determine a equação, em coordenadas cartesianas, da *lemniscata*.

$b)$ Passe para coordenadas polares a equação obtida no item $a)$ tomando para pólo a origem e Ox como eixo polar. Desenhe a curva.

3.6. Centro de Massa

Consideremos um sistema de "massas pontuais" $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. O *centro de massa* do sistema é, por definição, o ponto (x_c, y_c) onde

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

EXEMPLO 1. Determine o centro de massa do sistema constituído pelas massas m_1, m_2 localizadas nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), supondo $m = m_1 = m_2$.

Solução

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Deste modo, (x_c, y_c) é o ponto médio do segmento de extremidades (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

EXEMPLO 2. Considere o sistema de massas m_1, m_2, m_3 localizadas em (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Seja $M_1 = m_1 + m_2$ e considere o sistema M_1 e m_3, com M_1 localizada no centro de massa de m_1, m_2. Verifique que o centro de massa de M_1, m_3 é o mesmo que o de m_1, m_2, m_3.

Solução

Seja $(\bar{x}, \bar{y})$ o centro de massa de m_1 e m_2:

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \text{ e } \bar{y} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Seja $(\bar{x}_c, \bar{y}_c)$ o centro de massa de M_1, m_3:

$$\bar{x}_c = \frac{\bar{x} M_1 + x_3 m_3}{M_1 + m_3} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = x_c$$

$$\left(\bar{x} M_1 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} M_1 = x_1 m_1 + x_2 m_2\right)$$

$$\bar{y}_c = \frac{\bar{y} M_1 + y_3 m_3}{M_1 + m_3} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = y_c$$

Assim, $(\bar{x}_c, \bar{y}_c) = (x_c, y_c)$.

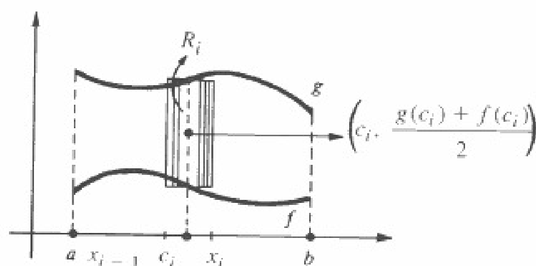
Deixamos a seu cargo generalizar o resultado do Ex. 2.

Vejamos, agora, como determinar o centro de massa de uma região A do plano que será imaginada como uma lâmina delgada, homogênea, de modo que a densidade superficial ρ é constante (ρ é massa por unidade de área). Suponhamos, inicialmente, que A possa ser decomposta em n retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Seja m_i a massa do retângulo R_i: m_i é o produto de ρ pela área de R_i. Neste caso, definimos o *centro de massa* de A como sendo o centro de massa do sistema $m_1, m_2, \ldots, m_n$, com m_i localizada no centro de R_i.

Suponhamos, agora, A da forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

onde f e g são supostas contínuas em $[a, b]$, e $f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$. Seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$ e seja c_i o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.



A massa m_i de R_i é: $m_i = \rho\,[g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i$. O centro de massa da figura formada pelos retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ é:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\,\rho[g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho[g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[g(c_i) + f(c_i)]\,\rho[g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho[g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i} \right)$$

Nada mais natural, então, do que tomar como *centro de massa* de A o ponto (x_c, y_c) onde

$$x_c = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\,[g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} [g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i} = \frac{\int_a^b x\,[g(x) - f(x)]\,dx}{\text{área de } A}$$

e

$$y_c = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[g(c_i) + f(c_i)][g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} [g(c_i) - f(c_i)]\,\Delta x_i} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g(x) + f(x)][g(x) - f(x)]\,dx}{\text{área de } A}.$$

Ou seja,

$$x_c = \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)]\,dx}{\text{área de } A}$$

e

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g(x) + f(x)][g(x) - f(x)]\,dx}{\text{área de } A}$$

Suponha, finalmente, que A possa ser decomposta em n regiões $A_1, A_2, \ldots, A_n$, onde

$$A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_i \leq x \leq b_i, f_i(x) \leq y \leq g_i(x)\}$$

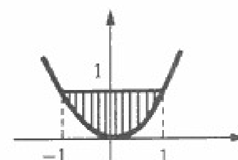
com f_i, g_i contínuas em $[a_i, b_i]$ e $f_i(x) \leq g_i(x)$ em $[a_i, b_i]$. Como você calcularia o centro de massa de A?

EXEMPLO 1. Determine o centro de massa da figura A limitada pela reta $y = 1$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução

$$x_c = \frac{\int_{-1}^{1} x(1 - x^2)\,dx}{\text{área de } A} = 0$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 + x^2)(1 - x^2)\,dx}{\text{área de } A} = \frac{3}{5}$$



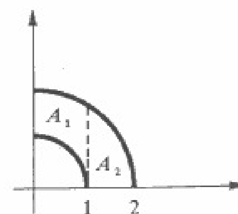
O centro de massa de A é o ponto $\left(0, \dfrac{3}{5}\right)$.

EXEMPLO 2. Calcule o centro de massa do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

Solução

Vamos imaginar A como uma lâmina delgada, homogênea, com densidade superficial $\rho = 1$. Sendo m_1 e m_2 as massas de A_1 e A_2, respectivamente, teremos, por ser $\rho = 1$,

$$m_1 = \text{área } A_1 \text{ e } m_2 = \text{área } A_2.$$



Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) os centros de massas de A_1 e A_2, respectivamente. O centro de massa de A será, então, o centro de massa do sistema m_1, m_2 com as massas localizadas, respectivamente, em (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Sendo, então, (x_c, y_c) o centro de massa de A teremos

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Como

$$x_1 = \frac{\int_0^1 x\,[\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}\,]\,dx}{\text{área } A_1},\ x_2 = \frac{\int_1^2 x\,\sqrt{4 - x^2}\,dx}{\text{área } A_2},$$

$$y_1 = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 [(\sqrt{4 - x^2})^2 - (\sqrt{1 - x^2}\,)^2]\,dx}{\text{área } A_1} \text{ e } y_2 = \frac{\frac{1}{2}\int_1^2 (\sqrt{4 - x^2})^2\,dx}{\text{área } A_2}$$

resulta

$$x_c = \frac{\int_0^1 x\,[\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{1 - x^2}\,]\,dx + \int_1^2 x\,\sqrt{4 - x^2}\,dx}{\text{área } A} = \frac{\int_0^2 x\,\sqrt{4 - x^2}\,dx - \int_0^1 x\,\sqrt{1 - x^2}\,dx}{\text{área } A}$$

e

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 3\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 (4 - x^2)\,dx}{\text{área } A} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2\,dx}{\text{área } A}.$$

Temos:

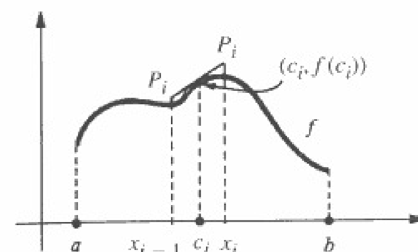
$$\text{área de } A = \frac{3\pi}{4};$$

$$\int_0^2 x\,\sqrt{4 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_4^0 \sqrt{u}\,du = \frac{8}{3};$$
$$\int_0^1 x\,\sqrt{1 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}.$$

Segue que

$$x_c = \frac{28}{9\pi} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{28}{9\pi}.$$

Vejamos, a seguir, como determinar o centro de massa do gráfico de uma função, que será imaginado como fio fino, homogêneo, de modo que a densidade linear ρ é constante (densidade linear é massa por unidade de comprimento). Seja f uma função definida e com derivada contínua em $[a, b]$. Seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e seja c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ o ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$



O segmento $P_{i-1}P_i$ é tangente em $(c_i, f(c_i))$ ao gráfico de f; o comprimento deste segmento é $\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$ (veja Seç. 3.4); logo, sua massa m_i é: $m_i = \rho\,\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$. O centro de massa do sistema formado pelos segmentos $P_{i-1}P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é o ponto

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \rho\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\rho\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i}\right)$$

Nada mais natural, então, do que tomar para centro de massa do gráfico de f o ponto (x_c, y_c) onde

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}$$

e

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}$$

Observe que $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ é o comprimento do gráfico de f.

Observação importante. O centro de massa do gráfico de f não tem nenhuma obrigação de pertencer ao gráfico de f.

Exercícios 3.6

1. Determine o centro de massa da região A dada.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$

2. Determine o centro de massa do gráfico da função dada.

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$

b) $f(x) = x^2$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

c) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$.

3. (*Teorema de Papus*). Considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

onde f e g são supostas contínuas em $[a, b]$ e $0 \leq f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$. Mostre que o volume do sólido, obtido pela rotação em torno do eixo x do conjunto A, é igual ao produto da área de A pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de massa de A.

4. Sejam f e g contínuas em $[a, b]$, com $\alpha \leq f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$ onde α é um real dado. Seja o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Mostre que o volume do sólido, obtido pela rotação em torno da reta $y = \alpha$ do conjunto A, é igual ao produto da área de A pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de massa de A.

5. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do círculo $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$ em torno

a) do eixo x

b) da reta $y = 1$.

6. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região $x^2 + 4y^2 \leq 1$, em torno da reta $y = 1$.

7. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 \leq y \leq 1\}$.

a) Calcule o centro de massa de A.

b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

8. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ em torno da reta $x + y = 2$.

9. (*Teorema de Papus para área de superfície de revolução*). Suponha $f(x) \geq 0$ e com derivada contínua em $[a, b]$. Mostre que a área da superfície, obtida pela rotação em torno do eixo Ox do gráfico de f, é igual ao produto do comprimento do gráfico de f pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de massa do gráfico de f.

4

Extensões do Conceito de Integral

4.1. Integrais Impróprias

Estamos interessados, nesta seção, em dar um significado para os símbolos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Definição 1. Seja f integrável em $[a, t]$, para todo $t > a$. Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se *integral imprópria* de f estendida ao intervalo $[a, +\infty[$.

Observação. Se $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ for $+\infty$ ou $-\infty$ continuaremos a nos referir a $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ como uma integral imprópria e escreveremos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \text{ ou } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty.$$

Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a integral imprópria é *divergente*. Se o limite for finito, diremos que a integral imprópria é *convergente*.

Suponhamos $f(x) \geq 0$ em $[a, +\infty[$ e que f seja integrável em $[a, t]$ para toda $t > a$. Seja A o conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leq y \leq f(x)$ e $x \geq a$. Definimos a área de A por

$$\text{área } A = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

EXEMPLO 1. Calcule $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

Solução

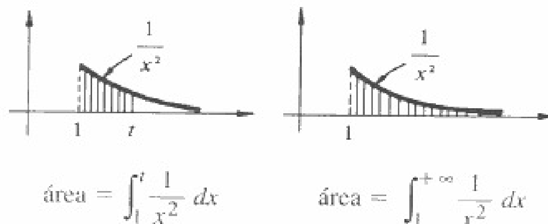
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Como

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = 2\frac{1}{t} + 1,$$

resulta

$$\int_1^{-\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{t} + 1\right] = 1.$$



área $= \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx$ área $= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$, a integral imprópria é convergente.

EXEMPLO 2. A integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução

$$\int_1^t \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^t = \ln t.$$

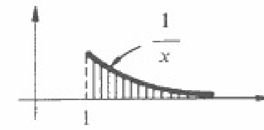
Assim,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty.$$

Logo, a integral imprópria é divergente.



área $= \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \ln t$



área $= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$

EXEMPLO 3. Suponha $s > 0$ e calcule $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t\, dt$.

Solução

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t\, dt = \lim_{u \to +\infty} \int_0^u e^{-st} \cos t\, dt.$$

$$\int_0^u \underset{\uparrow f}{e^{-st}} \underset{\uparrow g'}{\cos t}\, dt = [e^{-st} \operatorname{sen} t]_0^u - \int_0^u - se^{-st} \operatorname{sen} t\, dt = e^{-su} \operatorname{sen} u + s \int_0^u e^{-st} \operatorname{sen} t\, dt.$$

Assim

① $$\int_0^u e^{-st} \cos t\, dt = e^{-su} \operatorname{sen} u + s \int_0^u e^{-st} \operatorname{sen} t\, dt$$

Por outro lado,

$$\int_0^u \underset{\uparrow f}{e^{-st}} \underset{\uparrow g'}{\operatorname{sen} t}\, dt = [e^{-st}(-\cos t)]_0^u - \int_0^u - se^{-st}(-\cos t)\, dt$$

daí

② $$\int_0^u e^{-st} \operatorname{sen} t\, dt = -e^{-su} \cos u + 1 - s \int_0^u e^{-st} \cos t\, dt.$$

Substituindo ② em ① vem

$$\int_0^u e^{-st} \cos t\, dt = e^{-su} \operatorname{sen} u - se^{-su} \cos u + s - s^2 \int_0^u e^{-st} \cos t\, dt.$$

Daí

$$(1 + s^2) \int_0^u e^{-st} \cos t\, dt = e^{-su} \operatorname{sen} u - se^{-su} \cos u + s$$

e, portanto,

$$\int_0^u e^{-st} \cos t\, dt = \frac{1}{1 + s^2} [e^{-su} \operatorname{sen} u - se^{-su} \cos u + s].$$

Sendo sen u e cos u limitadas e $\lim_{u \to +\infty} e^{-su} = 0$ (lembre-se de que estamos supondo $s > 0$) resulta

$$\lim_{u \to +\infty} e^{-su} \operatorname{sen} u = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{u \to +\infty} se^{-su} \cos u = 0$$

e, portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{1+s^2} [e^{-su} \operatorname{sen} u - se^{-su} \cos u + s] = \frac{s}{1+s^2}.$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \frac{s}{1+s^2}$$

Definição 2. Seja f integrável em $[t, a]$ para todo $t < a$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx.$$

Definição 3. Seja f integrável em $[-t, t]$, para todo $t > 0$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx$$

desde que ambas as integrais do 2.° membro sejam convergentes.

Observação. Com relação à definição 3, se as duas integrais que ocorrem no 2.° membro forem iguais a $+\infty$ (ou $-\infty$), ou se uma delas for convergente e a outra $+\infty$ (ou $-\infty$), poremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = -\infty \right).$$

Exercícios 4.1

1. Calcule:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$

b) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$

c) $\int_0^{+\infty} e^{-sx}\, dx \; (s > 0)$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

e) $\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt$

f) $\int_0^{+\infty} te^{-st}\, dt \; (s > 0)$

g) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

i) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+x^2}\, dx \; (s > 0)$

j) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\, dx$

l) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\, dx$

m) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\, dx$

n) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx$

o) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\, dx$

p) $\int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sen} t\, dt$

q) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x}\, dx$

2. Calcule $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$, onde α é um real dado.

3. Calcule

a) $\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$

b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^5}\, dx$

c) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

d) $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\, dx$

h) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

4. Determine m para que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 3 \\ 0 & \text{se } |x| > 3 \end{cases}$$

5. Determine k para que se tenha $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|t|}\, dt = 1$.

6. Determine m para que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ onde

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

7. Sejam dados um real $s > 0$ e um natural $n \neq 0$.

a) Verifique que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^n\, dt = \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st}\, dt.$$

b) Mostre que $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^n\, dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

8. Sejam α e s, $s > 0$, reais dados. Verifique que

a) $\int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen} \alpha t\, dt = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \; (\alpha \neq 0)$

$b)\ \int_0^{+\infty} e^{-st}\cos \alpha t\, dt = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

$c)\ \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = \frac{1}{s-\alpha} (s > \alpha)$

$d)\ \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}.$

$e)\ \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, dt = \frac{1}{s^2}.$

$f)\ \int_0^{+\infty} e^{-st}\, te^{\alpha t}\, dt = \frac{1}{(s-\alpha)^2} (s > \alpha)$

9. Utilizando o Exerc. 8, calcule $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ sendo:

   a) $f(t) = \operatorname{sen} t + 3\cos 2t$ *b)* $f(t) = 3t + 2e^{3t} + te^t$

10. Suponha que, para todo $t > 0$, f seja integrável em $[-t, t]$; suponha, ainda, que $f(x) \geq 0$ para todo x. Prove que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx.$$

4.2. Função Dada por uma Integral Imprópria

Suponhamos f definida em IR e tal que, para todo x, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ seja convergente. Podemos, então, considerar a função F definida em IR dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Fixado o real a, para todo real u,

$$\int_u^x f(t)\, dt = \int_u^a f(t)\, dt + \int_a^x f(t)\, dt;$$

fazendo $u \to -\infty$ resulta

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt + \int_a^x f(t)\, dt$$

e, portanto,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt + H(x)$$

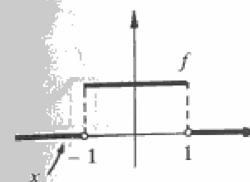
onde

$$H(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

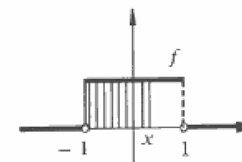
Já vimos que $H(x)$ é contínua e que H é derivável em todo x em que f for contínua; além do mais, $H'(x) = f(x)$ em todo x em que f for contínua. Como $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt$ é constante, resulta que F é contínua e que $F'(x) = f(x)$ em todo x em que f for contínua.

EXEMPLO 1. Esboce o gráfico de $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ onde $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } |t| \leq 1 \\ 0 \text{ se } |t| > 1. \end{cases}$

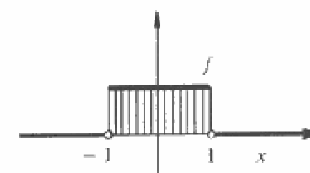
Solução



$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt$$



$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\, dt + \int_{-1}^{x} 1\, dt$$

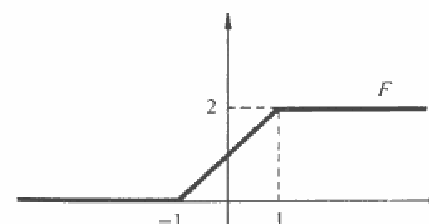


$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\, dt + \int_{-1}^{1} 0\, dt + \int_{1}^{x} 0\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\, dt & \text{se } x \leq -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\, dt + \int_{-1}^{x} 1\, dt & \text{se } |x| < 1 \\ \int_{-\infty}^{1} 0\, dt + \int_{-1}^{1} dt + \int_{1}^{x} 0\, dt & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

ou seja,

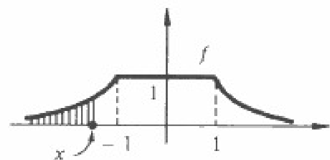
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \\ x+1 & \text{se } |x| < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



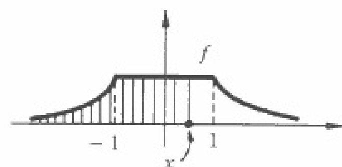
Observe: F é contínua e $F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$

EXEMPLO 2. Esboce o gráfico da função $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ onde $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & \text{se } |t| \geq 1 \\ 1 & \text{se } |t| < 1 \end{cases}$

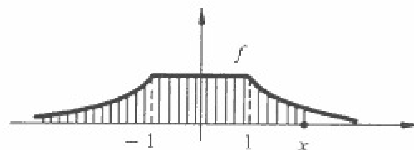
Solução



$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt$$



$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt + \int_{-1}^{x} 1\,dt$$



$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt + \int_{-1}^{1} 1\,dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt & \text{se } x < -1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt + \int_{-1}^{x} 1\,dt & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt + \int_{-1}^{1} 1\,dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{k \to -\infty} \int_{k}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{k \to -\infty} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{k}\right] = -\frac{1}{x}.$$

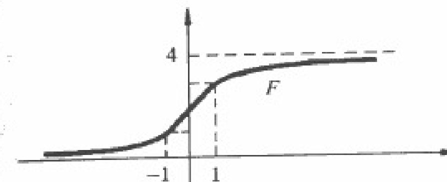
Em particular, $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$. Então

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ 1 + [t]_{-1}^{x} & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 1 + 2 + \left[-\dfrac{1}{t}\right]_{1}^{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x} + 4 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Como f é contínua, F é derivável em todos os pontos; assim, o gráfico de F não apresenta "bico".



Exercícios 4.2

Esboce o gráfico de $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ onde

1. $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & \text{se } t < 1 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > 1 \\ 1 - t^2 & \text{se } |t| \leq 1 \end{cases}$

6. $f(t) = e^{-|t|}$

7. $f(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$

8. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t-2)^2} & \text{se } t \leq 1 \\ \dfrac{1}{t} & \text{se } t > 1 \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t > 1 \end{cases}$

4.3. Integrais Impróprias: Continuação

O objetivo deste parágrafo é estender o conceito de integral para função definida e *não-limitada* num intervalo de extremos a e b, com a e b reais.

Definição 1. Seja f não-limitada em $]a, b]$ e integrável em $[t, b]$ para todo t em $]a, b[$. Definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

desde que o limite exista e seja finito. O número $\int_a^b f(x)\,dx$ denomina-se *integral imprópria* de f em $[a, b]$. Se o limite for $+\infty$ ou $-\infty$, continuaremos a nos referir a $\int_a^b f(x)\,dx$ como uma integral imprópria e escreveremos $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ ou $\int_a^b f(x)\,dx = -\infty$, conforme o caso. Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a integral imprópria é *divergente*. Se o limite for finito, diremos que a integral imprópria é *convergente*.

Já observamos que uma *condição necessária* para uma função f admitir integral de Riemann num intervalo $[a, b]$ é que f seja limitada em $[a, b]$. Deste modo, se f não for limitada em $[a, b]$, f não poderá admitir, neste intervalo, integral de Riemann; entretanto, poderá admitir *integral imprópria*.

EXEMPLO. Calcule $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

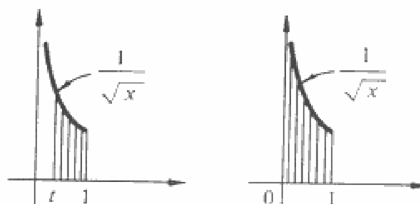
Solução

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ é não limitada em $]0, 1]$ e integrável (segundo Riemann) em $[t, 1]$ para $0 < t < 1$; de acordo com a definição anterior,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to 0^+} [2 - 2\sqrt{t}\,] = 2$$

ou seja,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$



área $= \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$ área $= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

Exercícios 4.3

1. Calcule

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

c) $\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 1}}\,dx$ d) $\int_0^1 \ln x\,dx$

2. Suponha f não-limitada em $[a, b[$ e integrável em $[a, t]$ para $a < t < b$. Defina $\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Calcule

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ b) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2 - x}}\,dx$

c) $\int_{-1}^2 \frac{1}{4 - x^2}\,dx$ d) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

4. Suponha f não-limitada e contínua nos intervalos $[a, c[$ e $]c, b]$. Defina $\int_a^b f(x)\,dx$.

5. Calcule

a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}}\,dx$ b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|}\,dx$

6. Suponha f contínua em $]a, b[$ e não-limitada em $]a, c]$ e em $[c, b[$. Defina $\int_a^b f(x)\,dx$.

4.4. Convergência e Divergência de Integrais Impróprias: Critério de Comparação

Em muitas ocasiões estaremos interessados não em saber qual o valor de uma integral imprópria, mas sim em saber se tal integral imprópria é convergente ou divergente. Para tal fim, vamos estabelecer, nesta seção, o *critério de comparação* que nos permite concluir a convergência ou divergência de uma integral imprópria comparando-a com outra que se sabe ser convergente ou divergente.

Observamos, inicialmente, que se f for integrável em $[a, t]$, para todo $t > a$, e se $f(x) \geq 0$ em $[a, +\infty[$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \geq a$$

será *crescente* em $[a, +\infty[$. De fato, se x_1 e x_2 são dois reais quaisquer, com $a \leq x_2 < x_1$, então

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0.$$

Assim, quaisquer que sejam x_1, x_2 em $[a, +\infty[$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

Logo, F é crescente em $[a, +\infty[$. Segue que $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$ ou será finito ou $+\infty$; será finito se existir $M > 0$ tal que $\int_a^x f(t)\, dt \leqslant M$ para todo $x \geqslant a$ (veja Exerc. 9).

Critério de comparação. Sejam f e g duas funções integráveis em $[a, t]$, para todo $t > a$, e tais que, para todo $x \geqslant a$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Então

a) $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ convergente.

b) $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ divergente.

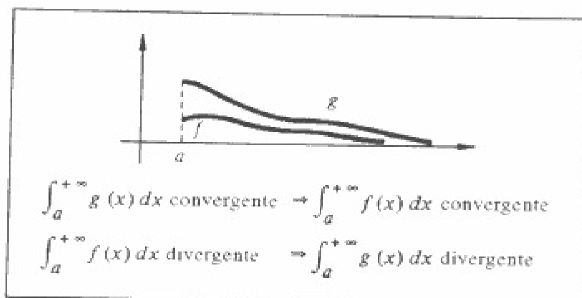
Demonstração

a) $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t g(x)\, dx$ é finito, pois, por hipótese, $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente. De $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, para todo $x \geqslant a$, resulta

$$\int_a^t f(x)\, dx \leqslant \int_a^t g(x)\, dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\, dx.$$

Sendo $F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$ crescente e limitada, resulta que $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$ será finito e, portanto, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ será convergente.

b) Fica a seu cargo. ■



$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ convergente $\to \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ convergente

$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ divergente $\to \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ divergente

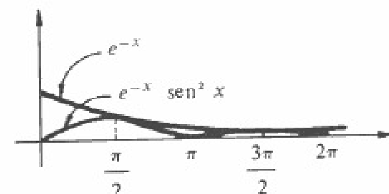
EXEMPLO 1. Verifique que $\int_a^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^2 x\, dx$ é convergente.

Solução

$$0 \leqslant e^{-x} \operatorname{sen}^2 x \leqslant e^{-x}, \text{ para todo } x \geqslant 0.$$

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x e^{-x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} [-e^{-t} + 1] = 1, \text{ logo,}$$

$\int_a^{+\infty} e^{-x}\, dx$ é convergente. Segue do critério de comparação que $\int_a^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^2 x\, dx$ é convergente e, além disso, $\int_a^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^2 x\, dx \leqslant 1$.



EXEMPLO 2. Verifique que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4 + 3}\, dx$ é divergente.

Solução

$$\frac{x^3}{x^4 + 3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{x^4}}.$$

Para todo $x \geqslant 1$, $\frac{1}{1 + \frac{3}{x^4}} \geqslant \frac{1}{4}$, e, portanto,

$$\frac{x^3}{x^4 + 3} \geqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} > 0.$$

De $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x}\, dx = +\infty$, segue, pelo critério de comparação, que $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4 + 3}\, dx$ é divergente.

O exemplo que daremos a seguir será bastante útil no estudo de convergência de integrais impróprias cujo integrando não seja sempre positivo. Tal exemplo conta-nos que se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ for *convergente*, então $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ também será (não vale a recíproca).

EXEMPLO 3. Suponha f integrável em $[a, t]$, para todo $t \geq a$. Prove

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente.}$$

Solução

Para todo $x \geq a$,

$$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2\,|f(x)|.$$

Sendo $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ convergente, resulta, do critério de comparação, que $\int_a^{+\infty} [|f(x)| + f(x)]\,dx$ é, também, convergente. Temos

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^t \{[|f(x)| + f(x)] - |f(x)|\}\,dx = \int_a^t [|f(x)| + f(x)]\,dx - \int_a^t |f(x)|\,dx.$$

Como $\int_a^{+\infty} [|f(x)| + f(x)]\,dx$ e $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ são convergentes, resulta que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também é convergente.

EXEMPLO 4. A integral imprópria $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução

$$0 \leq |e^{-x} \operatorname{sen}^3 x| \leq e^{-x}.$$

Como $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é convergente, então $\int_0^{+\infty} |e^{-x} \operatorname{sen}^3 x|\,dx$ também será convergente; pelo Exemplo 3, $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ é convergente.

EXEMPLO 5. É convergente ou divergente? Justifique.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$

Solução

a) $$\int_1^t \frac{1}{x} \operatorname{sen} x\,dx = \left[\frac{1}{x}(-\cos x)\right]_1^t - \int_1^t -\frac{1}{x^2}(-\cos x)\,dx =$$

$$= -\frac{\cos t}{t} + \cos 1 - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Para todo $x \geq 1$, $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ também será, e, portanto, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ é convergente. Como

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\cos t}{t} = \lim_{t \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\to 0} \underbrace{\cos t}_{\text{limitada}} = 0$$

resulta

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

ou seja, $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ *é convergente.*

b) Para todo x, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e, portanto,

$$\operatorname{sen}^2 x \leq |\operatorname{sen} x|.$$

Segue que, para todo $x \geq 1$,

① $$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \geq \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}.$$

Temos:

$$\int_1^t \frac{1}{x} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_1^t - \int_1^t -\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right] dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \int_1^t \left[\frac{1}{2x} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x^2}\right] dx.$$

Tendo em vista que $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x^2}\,dx$ é convergente (por quê?), $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx = +\infty$ e $\lim_{t \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} = 0$, resulta

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx = +\infty$$

ou seja,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx = +\infty$$

Pelo critério de comparação (veja ①), $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\text{sen } x}{x}\right| dx$ é divergente. Tendo em vista o item *a*), conclui-se que a recíproca da afirmação do Exemplo 3 não é verdadeira.

O teorema seguinte, cuja demonstração é deixada para exercício, estabelece a convergência ou divergência de certas integrais impróprias e que serão úteis no estudo de divergência e convergência de integrais impróprias.

Teorema

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leq 1$.

b) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ é convergente para todo $\alpha > 0$.

Exercícios 4.4

1. É convergente ou divergente? Justifique.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5 + 3x + 1} dx$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} dx$

c) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 2x + 1}} dx$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\, dx}{x^2}$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^3} dx$

f) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$

g) $\int_4^{+\infty} \frac{2x - 3}{x^3 - 3x^2 + 1} dx$

h) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$

i) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x}\, dx$

j) $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

l) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt[3]{x^6 + x + 1}} dx$

m) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$

2. Suponha f integrável em $[a, t]$, para todo $t \geq a$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, +\infty[$. Suponha que existem um α real e uma função g tais que, para todo $x \geq a$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} g(x)$. Suponha, além disso, que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L > 0$ (L real). Prove:

a) $\alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ convergente

b) $\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ divergente

3. Utilizando o Exerc. 2, estude a convergência ou divergência de cada uma das integrais a seguir.

a) $\int_2^{+\infty} \frac{x^6 - x + 1}{x^7 - 2x^2 + 3} dx$

b) $\int_{10}^{+\infty} \frac{x^5 - 3}{\sqrt{x^{20} + x^{10} - 1}} dx$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^5 + x + 2} dx$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x \ln (x + 1)} dx$

4. Seja f contínua em $[0, t]$, para todo $t > 0$, e suponha que existem constantes $M > 0$ e $\gamma > 0$ tais que, para todo $t \geq 0$,

① $$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}.$$

Prove que $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ é convergente para $s > \gamma$.

Observação. Uma função f se diz de *ordem exponencial* γ se existem constantes $M > 0$ e $\gamma > 0$ tais que ① se verifica.

5. Seja f uma função, com derivada contínua, e de ordem exponencial γ. Verifique que, para $s > \gamma$, $\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\, dt$ é convergente e que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\, dt = s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt - f(0).$$

6. Suponha que f seja de ordem exponencial γ e que, para todo t real,

② $$f'(t) + 3f(t) = t.$$

Mostre que, para todo $s > \gamma$,

③ $$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{f(0)}{s + 3} + \frac{1}{s^2(s + 3)}.$$

Conclua que existem constantes A, B, C tais que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{f(0)}{s + 3} + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 3}$$

Agora, utilizando o Exercício 8 da Seção 4.1 e supondo $f(0) = 1$, determine f que verifique ③ e mostre, em seguida, que esta f satisfaz ②.

Observação. A função g dada por

$$g(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

denomina-se *transformada de Laplace de f*.

7. Procedendo como no exercício anterior, determine f tal que

a) $f'(t) - 2f(t) = \cos t$ e $f(0) = 2$.

b) $f'(t) + f(t) = e^{2t}$ e $f(0) = -1$.

8. Suponha que f e f' sejam de ordens exponencial γ_1 e γ_2, respectivamente. Suponha, ainda, que f'' seja contínua. Verifique que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f''(t)\, dt = s^2 \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\, dt - sf(0) - f'(0)$$

9. Suponha $F(x)$ crescente em $[a, +\infty[$. Prove que $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ será finito ou $+\infty$. Será finito e igual a $\sup \{F(x) \mid x \geq a\}$ se existir $M > 0$ tal que, para todo $x \geq a$, $F(x) \leq M$.

5

Equações Diferenciais Lineares de 1.ª e 2.ª Ordens, com Coeficientes Constantes

5.1. Equação Diferencial Linear, de 1.ª Ordem, com Coeficiente Constante

Sejam dados um número a e uma função f definida e contínua num intervalo I. Uma equação diferencial linear, de 1.ª ordem, com coeficiente constante, é uma equação da forma

① $$\frac{dx}{dt} + ax = f(t).$$

Multiplicando ambos os membros de ① pelo *fator integrante* e^{at} (veja Cap. 13, Seç. 13.6, do Vol. 1) obtemos

$$e^{at}\frac{dx}{dt} + axe^{at} = e^{at} f(t)$$

ou

② $$\frac{d}{dt}[xe^{at}] = e^{at} f(t)$$

pois, $\frac{d}{dt}[xe^{at}] = \frac{dx}{dt}e^{at} + axe^{at}$.

Como f é contínua em I, $e^{at} f(t)$ admite primitiva em I. De ② segue que xe^{at} é da forma

$$xe^{at} = k + \int e^{at} f(t)\, dt$$

ou

③ $$x = ke^{-at} + e^{-at} \int e^{at} f(t)\, dt$$

com k constante. Por outro lado, é fácil verificar que as funções da forma ③ são soluções de ①. Chegamos, assim, ao importante resultado:

> As soluções de
>
> $$\frac{dx}{dt} + ax = f(t)$$
>
> são as funções da forma
>
> $$x = ke^{-at} + e^{-at} \int e^{at} f(t)\, dt$$
>
> com k constante

Este resultado é um caso particular daquele que obtivemos na Seç. 13.6 do Vol. 1. Observamos que no cálculo de $\int e^{at} f(t)\, dt$ a constante de integração pode ser omitida (por quê?).

EXEMPLO. Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} + x = t + 1.$$

a) Ache a solução geral.
b) Ache a solução $x = x(t)$ que satisfaz a *condição inicial* $x(0) = 1$. Esboce o gráfico.

Solução

a) A solução geral é ($a = 1$ e $f(t) = t + 1$)

$$x = ke^{-t} + e^{-t} \int e^{t}(t + 1)\, dt.$$

Como $\int e^{t}(t + 1)\, dt = te^{t}$ (verifique) resulta

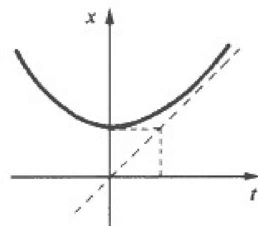
$$\boxed{x = ke^{-t} + t.}$$

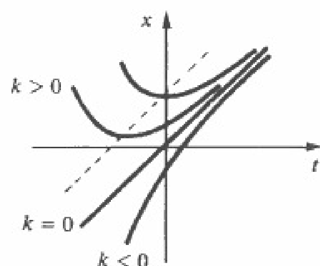
b) Precisamos determinar k para se ter $x = 1$ para $t = 0$.

$$1 = ke^{-0} + 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

A solução que satisfaz a condição inicial dada é

$$\boxed{x = e^{-t} + t.}$$





Exercícios 5.1

1. Ache a solução geral.

a) $\dfrac{dx}{dt} - 3x = e^t$ *b*) $\dfrac{dx}{dt} - x = 2t + 1$

c) $\dfrac{dx}{dt} - x = \cos t$ *d*) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = \operatorname{sen} t$

e) $\dfrac{dx}{dt} - 2x = e^{2t}$ *f*) $\dfrac{dx}{dt} - x = 5$

g) $\dfrac{dx}{dt} + x = \cos 2t$ *h*) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = \dfrac{1}{2}$

i) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x$ *j*) $\dfrac{ds}{dt} - 2s = e^{2t}$

l) $\dfrac{dq}{dt} + q = \cos 3t$ *m*) $\dfrac{dy}{dx} - y = \operatorname{sen} x$

n) $3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1$ *o*) $2\dfrac{dx}{dt} + x = t$

p) $5\dfrac{dy}{dx} - 10y = e^{3x}$ *q*) $\dfrac{dT}{dt} = 3T + 2$

r) $\dfrac{dy}{dx} = y + \cos 3x$ *s*) $\dfrac{dx}{dt} = 3x - e^{-t}$

2. Numa certa cultura de bactérias, a taxa de aumento é proporcional ao número presente. Verificando-se que o número dobra em 2 horas, quantas pode-se esperar ao final de 6 horas?

3. De acordo com a lei de resfriamento de Newton, a taxa de resfriamento de uma substância, numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura T da substância e a do ar. Sendo a temperatura do ar 20° e resfriando a substância de 110° para 80° em 20 minutos, determine a temperatura $T = T(t)$ no instante t, (suponha t dado em minutos).

4. Uma das equações básicas dos circuitos elétricos é

① $$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

onde L (henry) é a indutância, R (ohms) é a resistência, i (ampère) é a corrente e E (volt) a força eletromotriz.

a) Resolva ① supondo L e R constantes não-nulas, $E(t) = E_0$ para todo t e $i = 0$ para $t = 0$.

b) Resolva ① supondo $L = 2$, $R = 10$, $E(t) = 110 \operatorname{sen} 120\pi t$ e $i = 0$ para $t = 0$.

5.2. Equações Diferenciais Lineares, Homogêneas, de 2.ª Ordem, com Coeficientes Constantes

Uma *equação diferencial linear de 2.ª ordem, com coeficientes constantes*, é uma equação da forma

① $$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t)$$

onde b e c são números reais dados e $f: I \to \mathbb{R}$, I intervalo, é uma função contínua dada. Se $f(t) = 0$ em I, a equação acima se diz *homogênea*.

Nosso objetivo a seguir é determinar a *solução geral* da equação homogênea

② $$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Para isto, vamos precisar da equação algébrica

③ $$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

denominada *equação característica* de ②.

Observamos que se λ_1 for raiz real de ③, então $x = e^{\lambda_1 t}$ será solução de ②. De fato, para todo t,

$$(e^{\lambda_1 t})'' + b(e^{\lambda_1 t})' + ce^{\lambda_1 t} = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + ce^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t}(\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) = 0.$$

O teorema que demonstraremos a seguir mostra-nos que, conhecendo as raízes da equação característica, conhecemos, também, a solução geral da equação homogênea ②.

Teorema. Suponhamos que as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica ③ sejam reais. Então

(i) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução geral da equação homogênea ② será

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

(ii) se $\lambda_1 = \lambda_2$, a solução geral será

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t} \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Demonstração

Como λ_1 e λ_2 são raízes de $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, temos

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -b \\ \lambda_1 \lambda_2 = c. \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{dx}{dt} + \lambda_1\lambda_2 x = 0$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x\right]}_{u} - \lambda_2 \underbrace{\left[\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x\right]}_{u} = 0. \text{ (Verifique.)}$$

Segue que $x = x(t)$ será solução de ② se e somente se $\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x$ for solução da equação linear de 1.ª ordem

$$\frac{du}{dt} - \lambda_2 u = 0.$$

Como $u = k_2 e^{\lambda_2 t}$, segue que $x = x(t)$ será solução de ② se e somente se

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_1 x = k_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Deste modo, $x = x(t)$ será solução de ② se e somente se for da forma

$$x = k_1 e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}\int k_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\, dt$$

com k_1 e k_2 constantes.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$x = k_1 e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}\frac{k_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

ou

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

onde $A = k_1$ e $B = \frac{k_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Se $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$x = k_1 e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}\int k_2\, dt$$

ou seja,

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}$$

onde $A = k_1$ e $B = k_2$. ■

EXEMPLO 1. Resolva a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

Solução

A equação característica é $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, cujas raízes são -1 e -2. A solução geral da equação é

$$x = Ae^{-t} + Be^{-2t}.$$

EXEMPLO 2. Ache a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \\ x(0) = 0 \text{ e } x'(0) = 1 \end{cases}$$

Solução

O que queremos aqui é a solução da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$. Pelo exemplo anterior, a solução geral é

$$x = Ae^{-t} + Be^{-2t}.$$

Devemos, agora, determinar A e B para que as condições iniciais sejam satisfeitas. Temos

$$x' = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}.$$

Então

$$\begin{cases} Ae^{-0} + Be^{-20} = 0 \\ -Ae^{-0} - 2Be^{-20} = 1 \end{cases}$$

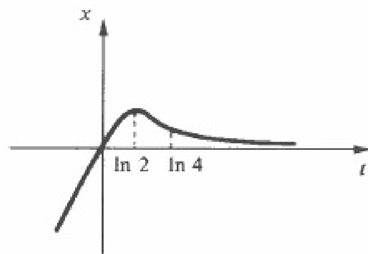
ou

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases}$$

e, portanto, $A = 1$ e $R = -1$. A solução do problema é

$$x = e^{-t} - e^{-2t}$$

cujo gráfico é



EXEMPLO 3. Resolva a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0.$$

Solução

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Como $\lambda = 4$ é a única raiz da equação característica, a solução geral será

$$x = Ae^{4t} + Bte^{4t}.$$

EXEMPLO 4. Resolva a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 9x = 0.$$

Solução

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$$

A solução geral da equação é

$$x = Ae^{3t} + Be^{-3t}.$$

Na Seç. 5.4, veremos como fica a solução geral da equação homogênea ②, no caso em que as raízes da equação característica forem complexas. Antes, porém, precisamos construir o corpo dos números complexos; é o que faremos na próxima seção.

Exercícios 5.2

1. Resolva a equação

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = 0$

b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = 0$

c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$

d) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} = 0$

e) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3x = 0$

f) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + x = 0$

g) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

h) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} = 0$

j) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6y = 0$

l) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} = 0$

m) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

n) $2\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - x = 0$

o) $3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 5\dfrac{dx}{dt} = 0$

2. Determine a solução do problema.

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 9x = 0$, $x(0) = 1$ e $x'(0) = -1$

b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} = 0$, $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + y = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

3. Resolva a equação. $\left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \text{ e } \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)$

a) $\ddot{x} - 2x = 0$ *b)* $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0$

c) $\ddot{y} - 7\dot{y} = 0$ *d)* $\ddot{y} - 10\dot{y} + 25y = 0$

4. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação da força elástica $-x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade e dada por $-2\dot{x}\vec{i}$ Determine a posição $x = x(t)$, $t \geq 0$, da partícula no instante t e discuta o movimento, supondo

a) $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$

b) $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -2$

5. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação da força elástica $-2x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade e dada por $-3\dot{x}\vec{i}$. Determine a posição $x = x(t)$, $t \geq 0$, da partícula no instante t e discuta o movimento, supondo $x(0) = e - 1$ e $\dot{x}(0) = -1$.

5.3. Números Complexos

Por um *número complexo* entendemos uma expressão do tipo

$$z = a + bi$$

onde a e b são números reais e i um símbolo cujo significado aparecerá logo a seguir. O conjunto dos números complexos é indicado por $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Sejam os números complexos $z = a + bi$ e $z_1 = a_1 + b_1 i$. Dizemos que z é *igual* a z_1 se e somente se $a = a_1$ e $b = b_1$, isto é,

$$a + bi = a_1 + b_1 i \Leftrightarrow a = a_1 \text{ e } b = b_1.$$

Definimos a *soma* de z e z_1 por

$$(a + bi) + (a_1 + b_1 i) = (a + a_1) + (b + b_1)\, i.$$

Definimos o *produto* de z por z_1 por

$$(a + bi)\,(a_1 + b_1 i) = (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1 b)\, i.$$

Segue da definição de produto de números complexos que

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)\,(0 + 1i) = -1.$$

Deste modo, i é um número complexo cujo quadrado é -1. Veja, agora, como você pode obter o produto de $a + bi$ por $a_1 + b_1 i$:

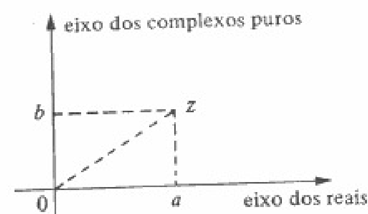
$$\begin{aligned}(a + bi)\,(a_1 + b_1 i) &= aa_1 + ab_1 i + ba_1 i + bb_1 i^2 = aa_1 + ab_1 i + ba_1 i - bb_1\\ &= (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1 b)\, i.\end{aligned}$$

Dizemos que $z = a + bi$ é um *número complexo real* se $b = 0$; se $a = 0$ e $b \neq 0$, diremos que z é um *número complexo puro*. Por razões óbvias identificaremos o complexo real $a + 0i$ com o número real a : $a + 0i = a$. Deste modo, podemos olhar $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$.

Deixamos como exercício verificar que a terra $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um *corpo*, isto é, qualquer que sejam os complexos z_1, z_2, z_3 tem-se:

ADIÇÃO	MULTIPLICAÇÃO
A1) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	M1) $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\,(z_2 z_3)$
A2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	M2) $z_1 z_2 = z_2 z_1$
A3) $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = z$	M3) $\forall z \in \mathbb{C}, 1 \cdot z = z$
A4) Para todo z em $\mathbb{C}$, existe um único w em $\mathbb{C}$ tal $z + w = 0$. Tal w é o *oposto* de z e indica-se por $-z$.	M4) Para todo $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, existe um único w em $\mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = 1$. Tal w é o *inverso* de z e indica-se por z^{-1} ou $\dfrac{1}{z}$.
D) $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

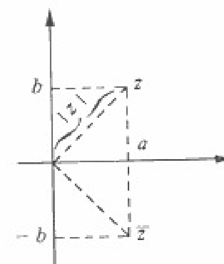
Os números complexos são representados geometricamente pelos pontos de um plano: o número complexo $z = a + ib$ é representado pelo ponto (a, b).



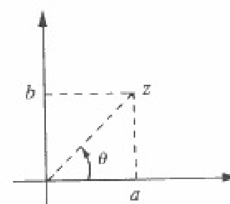
É comum referir-se ao ponto (a, b) como o *afixo* do complexo $z = a + ib$.

Seja $z = a + ib$. O número complexo $\bar{z} = a - ib$ denomina-se *conjugado* de z. O *módulo* de z é definido por

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Seja o número complexo $z = a + ib$ e tomemos θ de modo que $a = |z| \cos \theta$ e $b = |z| \operatorname{sen} \theta$. Assim $z = |z|\,(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, que é a expressão de z na *forma polar*.



O número θ denomina-se um *argumento de* z. Observe que sendo θ um argumento de z, qualquer outro será da forma $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLO 1. Determine o inverso, o conjugado e o módulo do complexo $z = 5 + 3i$.

Solução

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{5 + 3i} = \frac{5 - 3i}{(5 + 3i)\,(5 - 3i)} = \frac{5 - 3i}{25 + 9} = \frac{5}{34} - \frac{3}{34}\, i.$$

Assim,

$$\frac{1}{5+3i} = \frac{5}{34} - \frac{3}{34}\,i.$$

O conjugado de z é:

$$\bar{z} = \overline{(5+3i)} = 5 - 3i.$$

O módulo de z é:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{5^2 + 3^2}$$

ou seja,

$$|z| = \sqrt{34}.$$

EXEMPLO 2. Seja z um complexo qualquer. Prove

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow z \text{ é real.}$$

Solução

Seja $z = a + ib$. Temos

$$\bar{z} = z \Rightarrow a - ib = a + ib \Rightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

Assim, se $\bar{z} = z$, então $z = a$ que é real. Reciprocamente,

$$z \text{ real} \Leftrightarrow z = a + 0 \cdot i \Leftrightarrow \bar{z} = z.$$

EXEMPLO 3. Suponha $a > 0$, a real. Prove

$$z^2 + a = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{a} \text{ ou } z = -i\sqrt{a}.$$

Solução

$$z^2 + a = (z + i\sqrt{a})(z - i\sqrt{a}).$$

Assim,

$$z^2 + a = 0 \Leftrightarrow z + i\sqrt{a} = 0 \text{ ou } z - i\sqrt{a} = 0,$$

ou seja,

$$z^2 + a = 0 \Leftrightarrow z = -i\sqrt{a} \text{ ou } z = i\sqrt{a}.$$

Ou ainda

$$z^2 + a = 0 \Leftrightarrow z^2 = -a \Leftrightarrow z^2 = ai^2 \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{a}.$$

EXEMPLO 4. Considere a equação $az^2 + bz + c = 0$, onde $a \neq 0$, b e c são reais dados. Suponha $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Prove

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Solução

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0.$$

Somando $\frac{b^2}{4a^2}$ aos dois membros da última equação vem

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

ou

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ou

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{|\Delta| i^2}{4a^2};$$

daí

$$z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

ou seja,

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

EXEMPLO 5. *Resolva* $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Solução

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

ou seja,

$$x = -1 \pm i.$$

Exercícios 5.3

1. Calcule a e b.
   a) $(1+i)^3 = a + bi$
   b) $(2+3i)^2 = a + bi$
   c) $\frac{2}{3+i} = a + bi$
   d) $\frac{i}{2-i} = a + bi$

e) $(i-1)^4 = a + bi$

f) $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = a + bi$

g) $\dfrac{5}{2-3i} = a + bi$

h) $\dfrac{2+i}{3-i} = a + bi$

2. Resolva as equações.

a) $z^2 + 1 = 0$

b) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

c) $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

d) $z^2 + 2z + 3 = 0$

e) $\lambda^2 + w^2 = 0$, onde $w \neq 0$ é um real dado

f) $\lambda^2 + 4 = 0$

g) $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

h) $\lambda^2 + 5 = 0$

i) $z^2 + 2 = 0$

j) $\lambda^2 - 4 = 0$

l) $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

3. Sejam z e w dois complexos quaisquer. Verifique que

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (*o conjugado de um produto é igual ao produto dos conjugados*)

c) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (*o conjugado de uma soma é igual à soma dos conjugados*)

5.4. Solução Geral da Equação Homogênea no Caso em que as Raízes da Equação Característica São Números Complexos

Vamos estudar inicialmente a equação

$$① \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

onde $\omega \neq 0$ é um real dado. A equação característica de ① é $\gamma^2 + \omega^2 = 0$, cujas raízes são os números complexos ωi e $-\omega i$; deste modo, o que aprendemos na Seç. 5.2 não se aplica (no Apêndice 1 veremos como dar um tratamento único à equação homogênea $\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + cx = 0$, quer as raízes da equação característica sejam reais ou complexas).

Observamos que uma função $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, será solução de ① se e somente se, para todo t,

$$② \qquad x''(t) = -\omega^2 x(t).$$

Como as funções sen ωt e cos ωt satisfazem ②, segue que $x = \text{sen}\ \omega t$ e $x = \cos \omega t$ são soluções de ①. Deixamos a cargo do leitor verificar que, quaisquer que sejam os reais A e B,

$$③ \qquad x = A \cos \omega t + B\ \text{sen}\ \omega t$$

será, também, solução de ①. Nosso objetivo a seguir é provar que $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, será solução de ① se e somente se for da forma ③.

Para atingir nosso objetivo, vamos provar primeiro que se $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, for solução de ① então existirá uma constante k tal que, para todo t,

$$[x'(t)]^2 + \omega^2 [x(t)]^2 = k.$$

(Esta relação nos diz que, se o movimento de uma partícula na reta for regido pela equação ①, então a soma da *energia cinética* $\dfrac{[\dot{x}(t)]^2}{2}$ com a *energia potencial* $\dfrac{[\omega x(t)]^2}{2}$ mantém-se *constante* durante o movimento.)

De fato, sendo $x = x(t)$ solução de ①, para todo t, tem-se

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Daí, para todo t,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{[x'(t)]^2 + \omega^2 [x(t)]^2\right\} &= 2x'(t)x''(t) + 2\omega^2 x(t)x'(t) \\ &= 2x'(t)\left[x''(t) + \omega^2 x(t)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $[x'(t)]^2 + \omega^2 [x(t)]^2$ é constante.

Suponhamos, agora, que $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, seja uma solução qualquer de ①. Façamos $a_0 = x(0)$ e $b_0 = x'(0)$. A função f dada por $f(t) = a_0 \cos \omega t + \dfrac{b_0}{\omega}$ sen ωt é solução de ① e, além disso, $f(0) = a_0$ e $f'(0) = b_0$. Sendo $f(t)$ e $x(t)$ soluções de ①, $f(t) - x(t)$ também será. Pelo que vimos acima, existirá uma constante k tal que, para todo t,

$$[f'(t) - x'(t)]^2 + \omega^2 [f(t) - x(t)]^2 = k.$$

De $f(0) = x(0)$ e $f'(0) = x'(0)$ resulta $k = 0$. Assim, para todo t,

$$[f'(t) - x'(t)]^2 + \omega^2 [f(t) - x(t)]^2 = 0$$

e, portanto, $x(t) = f(t)$, ou seja,

$$x(t) = A \cos \omega t + B\ \text{sen}\ \omega t$$

onde $A = a_0$ e $B = \dfrac{b_0}{\omega}$. *Fica provado assim que* $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, será solução de ① se e somente se for da forma ③.

> A solução geral de
>
> $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$
>
> onde $\omega \neq 0$ é um real dado, é
>
> $$x = A \cos \omega t + B\ \text{sen}\ \omega t \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

EXEMPLO 1. Resolva a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

Solução

As raízes da equação característica

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

são $2i$ e $-2i$. A solução geral é

$$x = A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t.$$

As notações $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ (devidas a Newton) são freqüentemente usadas, em física, para indicar, respectivamente, as derivadas de 1.ª e 2.ª ordens de x em relação ao tempo t: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Nos próximos exemplos utilizaremos tais notações.

EXEMPLO 2. O movimento de uma partícula sobre o eixo Ox é regido pela equação

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

onde $m > 0$ e $k > 0$ são constantes reais dadas. Descreva o movimento.

Solução

A equação é equivalente a

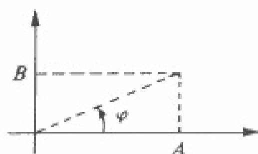
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. A solução geral é

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t.$$

Tomando-se φ tal que

$$A = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \varphi \text{ e } B = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen} \varphi$$



resulta

$$x = \sqrt{A^2 + B^2}\,[\cos \varphi \cos \omega t + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega t]$$

ou seja,

$$\boxed{x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \varphi)}$$

Trata-se, então, de um *movimento harmônico simples* de amplitude $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Observação: Dizemos que uma partícula que se desloca sobre o eixo Ox descreve um *movimento harmônico simples* (MHS) se a equação horária for do tipo $x = a \cos(\omega t + \varphi_0)$. Os números a, ω e φ_0 denominam-se, respectivamente, *amplitude*, *pulsação* e *fase inicial* do movimento.

Vejamos, agora, qual é a solução geral de

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

no caso em que as raízes da equação característica são números complexos. Se as raízes da equação característica fossem reais e distintas, $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, a solução geral seria, como já vimos,

$$x = Ae^{\frac{(-b + \sqrt{\Delta})}{2}t} + Be^{\frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2}t}$$

ou

$$x = e^{-\frac{b}{2}t}\left[Ae^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + Be^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t}\right]$$

Observe que $Ae^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + Be^{\frac{-\sqrt{\Delta}}{2}t}$ $(\Delta > 0)$ é a solução geral de

$$\ddot{x} - \frac{\Delta}{4}x = 0. \text{ (Verifique.)}$$

Provaremos a seguir que se as raízes da equação característica forem números complexos $(\Delta < 0)$ a solução geral será

$$x = e^{-\frac{b}{2}t}\left[A \cos \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t + B \operatorname{sen} \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right].$$

Teorema. Seja a equação (b e c reais dados)

⑥ $$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

e suponha que as raízes da equação característica $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sejam complexas $\left(\lambda = \alpha \pm \beta i \text{ onde } \alpha = -\frac{b}{2} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}\right)$. Então a solução geral de ⑥ será

$$x = e^{\alpha t}[A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t] \ (A, B \in \mathbb{R}).$$

Demonstração

Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$ e tais que, para todo t,

$$f(t) = e^{-\frac{b}{2}t}\, g(t).$$

Vamos mostrar que f será solução de ⑥ se, e somente se, g for solução de

⑦ $$\ddot{x} + \left(\frac{-\Delta}{4}\right)x = 0.$$

De fato, se f for solução de ⑥ teremos, para todo t,

$$\ddot{f}(t) + b\dot{f}(t) + cf(t) = 0$$

ou

⑧ $$\left[e^{-\frac{b}{2}t}\, g(t)\right]'' + b\left[e^{-\frac{b}{2}t}\, g(t)\right]' + c\left[e^{-\frac{b}{2}t}\, g(t)\right] = 0.$$

Como

$$\left[e^{-\frac{b}{2}t}\, g(t)\right]' = -\frac{b}{2}\, e^{-\frac{b}{2}t}\, g(t) + e^{-\frac{b}{2}t}\, g'(t)$$

e

$$\left[e^{-\frac{b}{2}t}\, g(t)\right]'' = +\frac{b^2}{4}\, e^{-\frac{b}{2}t}\, g(t) + b\, e^{-\frac{b}{2}t}\, g'(t) + e^{-\frac{b}{2}t}\, g''(t).$$

substituindo em ⑧ e simplificando resulta

$$e^{-\frac{b}{2}t}\left[g''(t) + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)g(t)\right] = 0.$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, segue que

$$g''(t) + \left(\frac{-\Delta}{4}\right)g(t) = 0$$

e, portanto, g é solução de ⑦. Deixamos a seu cargo verificar se g for solução de ⑦ então f será solução de ⑥. Sendo g solução de ⑦

$$g(t) = A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t$$

onde $\beta = \sqrt{\frac{-\Delta}{4}}$. Segue, então, que

$$f(t) = e^{-\frac{b}{2}t}\,[A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t]$$

e fazendo $\alpha = -\frac{b}{2}$, resulta

$$f(t) = e^{\alpha t}[A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t]. \ \blacksquare$$

EXEMPLO 3. Considere a equação

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0.$$

a) Ache a solução geral.
b) Esboce o gráfico da solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

Solução

a) $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$. Assim,

$$\lambda = -1 \pm i \ (\alpha = -1, \beta = 1)$$

A solução geral é

$$x = e^{-t}[A \cos t + B \operatorname{sen} t].$$

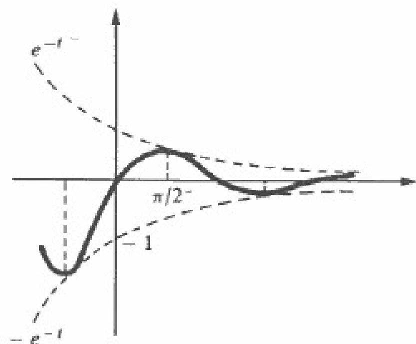
b) $x(0) = 0$ e $x = e^{-t}(A \cos t + B \operatorname{sen} t) \Leftrightarrow A = 0.$

Assim, $x = Be^{-t} \operatorname{sen} t$. Segue

$$\dot{x} = -Be^{-t} \operatorname{sen} t + Be^{-t} \cos t.$$

Daí $\dot{x}(0) = B$, logo, $B = 1$. A solução que satisfaz as condições iniciais dadas é

$$x = e^{-t} \operatorname{sen} t$$



A seguir, vamos destacar, num quadro, os resultados obtidos nesta seção e na 5.2.

> Seja a equação
>
> $$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \qquad (b \text{ e } c \text{ reais dados})$$
>
> e sejam λ_1, λ_2 as raízes da equação característica.
>
> (I) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1 e λ_2 reais, a solução geral será
>
> $$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$
>
> (II) Se $\lambda_1 = \lambda_2$, a solução geral será
>
> $$x = e^{\lambda_1 t}[A + Bt].$$
>
> (III) Se as raízes da equação característica forem complexas, $\lambda = \alpha \pm \beta i$, a solução geral será
>
> $$x = e^{\alpha t}[A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t].$$

EXEMPLO 4. Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação de uma *força elástica* $-kx\vec{i}$ $(k > 0)$ e de uma *força de amortecimento* proporcional à velocidade e dada por $-c\dot{x}\vec{i}$ $(c > 0)$. Determine a equação que rege o movimento e discuta as soluções.

Solução

Pela lei de Newton

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

ou seja,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

que é a equação que rege o movimento. Esta equação é equivalente a

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (10)$$

onde $\gamma = \dfrac{c}{2m}$ e $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. As raízes da equação característica são: $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$.

1.º caso. Movimento oscilatório amortecido ou subcrítico $(\gamma^2 < \omega^2)$.

Sendo $\gamma^2 < \omega^2$, as raízes da equação característica serão complexas, $\lambda = -\gamma \pm \overline{\omega} i$, onde $\overline{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$. A solução geral de (10) será

$$x = e^{-\gamma t}[A \cos \overline{\omega} t + B \operatorname{sen} \overline{\omega} t]$$

e, portanto,

$$\boxed{x = Ke^{-\gamma t} \cos (\overline{\omega} t - \varphi)}$$

onde $K = \sqrt{A^2 + B^2}$ e φ é tal que $A = K \cos \varphi$ e $B = K \operatorname{sen} \varphi$.

2.º caso. Amortecimento crítico $(\gamma^2 = \omega^2)$

Neste caso, a equação característica admitirá uma única raiz real $\lambda = -\gamma$. A solução geral será

$$x = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

ou seja,

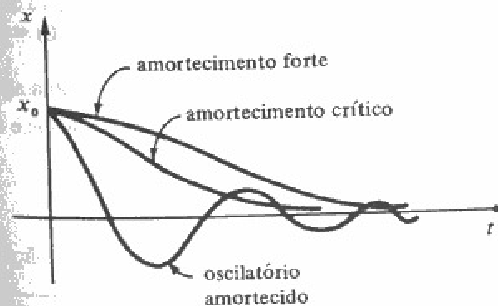
$$\boxed{x = e^{-\gamma t}[A + Bt].}$$

3.º caso. Amortecimento forte ou supercrítico $(\gamma^2 > \omega^2)$

Sendo $\gamma^2 > \omega^2$ as raízes da equação característica serão reais e distintas, $\lambda = -\gamma \pm \Omega$, onde $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$. A solução geral será

$$\boxed{x = e^{-\gamma t}[Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}].}$$

A figura a seguir mostra o gráfico da solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = x_0$ $(x_0 > 0)$ e $\dot{x}(0) = 0$.



Note que, nos casos 2 e 3, o amortecimento é suficientemente grande de modo a não permitir oscilação da partícula em torno da posição de equilíbrio ($x = 0$).

Exercícios 5.4

1. Resolva a equação

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$

b) $\ddot{x} + 5x = 0$

c) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$

d) $\frac{d^2x}{dt^2} - 5x = 0$

e) $\ddot{x} + 9x = 0$

f) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$

g) $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$

h) $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} = 0$

i) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 10y = 0$

j) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 3y = 0$

l) $\ddot{y} - 6\dot{y} + 5y = 0$

m) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0$

n) $\ddot{y} + 4y = 0$

o) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 3y = 0$

p) $\ddot{y} + ay = 0$, onde $a > 0$ é uma constante.

q) $\ddot{y} + ay = 0$, onde $a < 0$ é uma constante.

r) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 6y = 0$

s) $\ddot{x} + 8\dot{x} + 20x = 0$

2. Determine a solução do problema.

a) $\ddot{x} + 4x = 0$, $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$, $x(0) = -1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

c) $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$, $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$

d) $\ddot{x} + x = 0$, $x(0) = -1$ e $\dot{x}(0) = 2$

3. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação da força elástica $-4x\vec{i}$. Supondo $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$, determine a velocidade no instante t.

4. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação de uma força elástica $-2x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade dada por $-2\dot{x}\vec{i}$. Determine a equação horária do movimento supondo $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

5. f é uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que sua derivada segunda é igual à diferença entre sua derivada da primeira e ela própria. Determine f sabendo, ainda, que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

6. Um móvel desloca-se sobre o eixo Ox com aceleração proporcional à diferença entre a velocidade e a posição. Determine a posição $x = x(t)$ do móvel, supondo $\ddot{x}(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 1$ e $x(0) = 0$.

7. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo Ox sob a ação de uma força elástica $-x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade e dada por $-c\dot{x}\vec{i}$ ($c > 0$). Determine c para que o movimento seja

a) fortemente amortecido.
b) criticamente amortecido.
c) oscilatório amortecido.

5.5. Equações Diferenciais Lineares, Não-homogêneas, de 2.ª Ordem, com Coeficientes Constantes

Consideremos a equação linear, de 2.ª ordem, com coeficientes constantes

$$\textcircled{1} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t)$$

onde f é suposta definida e contínua num intervalo I. Se f não for identicamente nula em I, diremos que ① é *não-homogênea*. Diremos, ainda, que

$$\textcircled{H} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

é a *equação homogênea associada* a ①

Mostraremos, a seguir, que se $x_p = x_p(t)$, $t \in I$, for uma *solução particular* de ①, então a *solução geral* de ① será

$$x = x_h + x_p$$

onde x_h é a solução geral da homogênea associada a ①. De fato, sendo $x_p = x_p(t)$, $t \in I$, solução de ①, para todo $t \in I$,

$$\ddot{x}_p(t) + b\dot{x}_p(t) + cx_p(t) = f(t).$$

Supondo que $x = x(t)$, $t \in I$, seja outra solução qualquer de ①, resulta que $x(t) - x_p(t)$ é solução da homogênea Ⓗ, pois, para todo $t \in I$,

$$\frac{d^2}{dt^2}[x(t) - x_p(t)] + b\frac{d}{dt}[x(t) - x_p(t)] + c[x(t) - x_p(t)] =$$
$$[\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t)] - [\ddot{x}_p(t) + b\dot{x}_p(t) + cx_p(t)] = f(t) - f(t) = 0.$$

Por outro lado, se $x = x(t)$, $t \in I$, for tal que $x(t) - x_p(t)$ é solução da homogênea, então $x = x(t)$ será solução de ① (verifique). Segue que a solução geral de ① é

$$x = x_h + x_p$$

onde x_h é a solução geral da homogênea Ⓗ e x_p uma solução particular de ①.

Conclusão

A solução geral de

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$$

é

$$x = x_h + x_p$$

onde x_p é uma solução particular da equação dada e x_h a solução geral da homogênea associada.

Determinar a solução geral da homogênea associada já sabemos. O problema, agora, é como determinar uma solução particular. Os exemplos que apresentaremos a seguir mostram como determinar, em alguns casos, uma solução particular através de uma "escolha criteriosa". No final desta seção você encontrará uma tabela que o ajudará nesta "escolha criteriosa".

EXEMPLO 1. Determine a solução geral de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t.$$

Solução

A homogênea associada é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

e a solução geral $x_h = Ae^{-2t} + Be^{-t}$ (verifique). Vamos, agora, procurar uma solução particular da equação dada. Tentaremos uma solução do tipo

$$x_p = m + nt$$

onde m e n são coeficientes a determinar. Você acha natural tal escolha? Por quê? O que precisamos fazer, agora, é substituir esta função na equação e determinar m e n para que se tenha uma identidade.

$$(m + nt)'' + 3(m + nt)' + 2(m + nt) = t$$

ou

$$3n + 2m + 2nt = t.$$

Devemos ter então

$$\begin{cases} 3n + 2m = 0 \\ 2n = 1 \end{cases}$$

ou seja, $n = \frac{1}{2}$ e $m = -\frac{3}{4}$. Deste modo,

$$x_p = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t$$

é uma solução particular da equação. A solução geral será

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-t} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t$$

EXEMPLO 2. Considere a equação

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 1.$$

a) Olhando para a equação, "chute" uma solução particular.
b) Ache a solução geral.

Solução

a) A função constante $x(t) = \frac{1}{2}$ é uma solução particular (verifique):
b) A solução geral da homogênea associada é

$$x_h = Ae^{-2t} + Be^{-t}.$$

Segue que a solução geral da equação dada é

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-t} + \frac{1}{2}.$$

EXEMPLO 3. Considere a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = e^{3t}$$

a) Determine uma solução particular.
b) Ache a solução geral.

Solução

a) Nada mais natural do que tentar uma solução particular do tipo

$$x_p = me^{3t}$$

onde m é um coeficiente a determinar. Você acha que é realmente natural esta escolha? Por quê? Devemos determinar m de modo que, para todo t,

$$(me^{3t})'' + 4(me^{3t})' + 4(me^{3t}) = e^{3t}$$

ou

$$(9m + 12m + 4m)e^{3t} = e^{3t}$$

ou

$$25me^{3t} = e^{3t}.$$

Devemos ter, então, $25m = 1$ ou $m = \frac{1}{25}$. Assim,

$$x_p = \frac{1}{25}e^{3t}$$

é uma solução particular.

b) A solução geral da homogênea associada é

$$x_h = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}.$$

Segue que a solução geral da equação dada é

$$x = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \frac{1}{25}e^{3t}.$$

EXEMPLO 4. Ache a solução geral de

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \text{sen } 2t.$$

Solução

Vamos tentar uma solução particular do tipo

$$x_p = m \cos 2t + n \text{ sen } 2t.$$

Devemos determinar m e n de modo que, para todo t,

$$[m \cos 2t + n \text{ sen } 2t]'' + 4\,[m \cos 2t + n \text{ sen } 2t]' + 4\,[m \cos 2t + n \text{ sen } 2t] = \text{sen } 2t$$

ou

$$-8m \text{ sen } 2t + 8n \cos 2t = \text{sen } 2t.$$

Devemos ter, então, $-8m = 1$ e $8n = 0$, ou seja, $m = -\frac{1}{8}$ e $n = 0$.

$$x_p = -\frac{1}{8}\cos 2t$$

é uma solução particular. Como

$$x_h = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$$

é a solução geral da homogênea associada, segue que

$$x = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} - \frac{1}{8}\cos 2t$$

é a solução geral da equação dada.

O quadro que apresentamos a seguir mostra como escolher a solução particular nos casos: $f(t) = P(t)$, P polinômio, $f(t) = a_0 e^{\alpha t}$ ou $f(t) = a_0 \cos \alpha t$.

$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$	
$f(t)$	Solução particular
$a_0 e^{\alpha t}$	1. Se α não é raiz da equação característica, $x_p = me^{\alpha t}$. 2. Se α é raiz simples, $x_p = mte^{\alpha t}$. 3. Se α é raiz dupla, $x_p = mt^2e^{\alpha t}$.
$P(t)$	1. Se $c \neq 0$, $x_p = P_1(t)$ onde P_1 é um polinômio de mesmo grau que P. 2. Se $c = 0$ e $b \neq 0$, $x_p = tP_1(t)$.
$a_0 \cos \alpha t$	1. Se $b \neq 0$, $x_p = m \cos \alpha t + n \text{ sen } \alpha t$. 2. Se $b = 0$ e se $\cos \alpha t$ não for solução da homogênea, $x_p = m \cos \alpha t$. 3. Se $b = 0$ e se $\cos \alpha t$ for solução da homogênea, $x_p = mt \cos \alpha t + nt \text{ sen } \alpha t$. (*Ressonância.*)

Observação: Se $f(t) = a_0 \text{ sen } \alpha t$, procede-se como no caso $f(t) = a_0 \cos \alpha t$.

EXEMPLO 5. Resolva a equação

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^{-t}$$

Solução

A solução geral da homogênea associada é

$$x_h = Ae^{-t} + Be^{-2t}.$$

Como e^{-t} é solução da homogênea, a escolha $x_p = me^{-t}$ não resolve o problema, pois, qualquer que seja m,

$$(me^{-t})'' + 3\,(me^{-m})' + 2\,(me^{-t}) = 0$$

Como -1 é raiz simples da equação característica da homogênea, a equação admitirá uma solução particular do tipo

$$x_p = mte^{-t} \text{ (veja quadro anterior).}$$

Devemos determinar m de modo que, para todo t,

$$(mte^{-t})'' + 3\,(mte^{-t})' + 2\,(mte^{-t}) = e^{-t}$$

ou (após derivar e simplificar)

$$me^{-t} = e^{-t}$$

logo, $m = 1$. Segue que

$$x_p = te^{-t}$$

é uma solução particular. A solução geral da equação dada é

$$x = Ae^{-t} + Be^{-2t} + te^{-t}.$$

EXEMPLO 6. Determine a solução geral de

$$\ddot{x} + 4x = \cos t.$$

Solução

Vamos tentar uma solução particular do tipo

$$x_p = m \cos t.$$

Esta escolha é motivada pelo fato de que derivando-se duas vezes o cosseno volta-se ao cosseno.

$$(m \cos t)'' + 4\, m \cos t = \cos t$$

ou

$$3\, m \cos t = \cos t$$

logo, $m = \frac{1}{3}$. Assim, $x_p = \frac{1}{3} \cos t$ é uma solução particular. A solução geral da equação dada é

$$x = A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{3} \cos t.$$

EXEMPLO 7. Resolva a equação

$$\ddot{x} + 4x = \operatorname{sen} 2t.$$

Solução

A solução geral da homogênea $\ddot{x} + 4x = 0$ é

$$x_h = A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t.$$

Como sen $2t$ é uma solução da homogênea associada, não adianta tentar solução particular do tipo $x_p = m \operatorname{sen} 2t$, pois, substituindo tal função na equação dada, o 1.º membro se anula e o 2.º não. Tenta-se, então, neste caso, solução particular do tipo

② $$x_p = mt \operatorname{sen} 2t + nt \cos 2t.$$

Temos:

$$(mt \operatorname{sen} 2t + nt \cos 2t)' = m \operatorname{sen} 2t + 2mt \cos 2t + n \cos 2t - 2nt \operatorname{sen} 2t$$

③ $$(mt \operatorname{sen} 2t + nt \cos 2t)'' = 4m \cos 2t - 4n \operatorname{sen} 2t - 4mt \operatorname{sen} 2t - 4nt \cos 2t$$

Substituindo ② e ③ na equação dada e simplificando, vem:

$$4m \cos 2t - 4n \operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} 2t$$

e, portanto, $m = 0$ e $n = -\frac{1}{4}$. Assim, $x_p = -\frac{1}{4} t \cos 2t$ é uma solução particular. A solução geral é, então, $x = A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t$. (Suponha que o movimento de uma partícula que se desloca sobre o eixo Ox é regido pela equação deste exemplo; descreva o movimento.)

Observação: Na determinação de uma solução particular, em geral, estão envolvidos muitos cálculos; por este motivo é sempre bom verificar se a solução particular encontrada é realmente solução particular. Por exemplo, $x_p = -\frac{1}{4} t \cos 2t$ é realmente uma solução particular de $\ddot{x} + 4x = \operatorname{sen} 2t$, pois,

$$\left(-\frac{1}{4} t \cos 2t\right)'' + 4\left(-\frac{1}{4} t \cos 2t\right) = \left(-\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{2} t \operatorname{sen} 2t\right)' - t \cos 2t =$$
$$= \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + t \cos 2t\right) - t \cos 2t = \operatorname{sen} 2t.$$

EXEMPLO 8. (*Princípio de superposição*). Considere a equação

④ $$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f_1(t) + f_2(t)$$

onde $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções dadas, definidas e contínuas num mesmo intervalo I. Mostre que se $x_1 = x_1(t)$, $t \in I$, for uma solução particular de

⑤ $$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f_1(t)$$

e se $x_2 = x_2(t)$, $t \in I$, uma solução particular de

⑥ $$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f_2(t)$$

então $x_p = x_1(t) + x_2(t)$ será uma solução particular de ④.

Solução

Sendo $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ soluções particulares de ⑤ e ⑥, respectivamente, teremos, para todo $t \in I$,

$$\ddot{x}_1(t) + b\dot{x}_1(t) + cx_1(t) = f_1(t)$$

e

$$\ddot{x}_2(t) + b\dot{x}_2(t) + cx_2(t) = f_2(t)$$

e daí, somando membro a membro, resulta

$$[x_1(t) + x_2(t)]'' + b\,[x_1(t) + x_2(t)]' + c\,[x_1(t) + x_2(t)] = f_1(t) + f_2(t).$$

Logo, $x_p = x_1(t) + x_2(t)$ é uma solução particular da Equação ④.

EXEMPLO 9. Resolva a equação

$$\ddot{x} + 4x = e^t + \text{sen } 2t.$$

Solução

$x_1 = \frac{1}{5}e^t$ é uma solução particular de

$$\ddot{x} + 4x = e^t. \qquad \text{(Verifique.)}$$

Pelo Exemplo 7, $x_2 = -\frac{1}{4}t\cos 2t$ é uma solução particular de

$$\ddot{x} + 4x = \text{sen } 2t.$$

Pelo *princípio de superposição*

$$x_p = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{4}t\cos 2t$$

é uma solução particular da equação dada. Então, a solução geral da equação dada é

$$x = A\cos 2t + B\,\text{sen } 2t + \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{4}t\cos 2t.$$

Exercícios 5.5

1. Determine a solução geral.

a) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3x = \cos 3t$

b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2t + 1$

c) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 5e^t$

d) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 8e^{2t}$

e) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4$

f) $\ddot{y} + 2\dot{y} = 4$

g) $\ddot{x} + x = 2\,\text{sen } t$

h) $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = t^2$

i) $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 3t^2$

j) $\ddot{x} + 9x = \text{sen } t + 2\cos t$

l) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \cos 2t$

m) $\ddot{x} + 9x = \text{sen } 3t$

n) $\ddot{x} - 4x = e^{2t}$

o) $\ddot{x} - 4x = 8\cos t$

p) $\ddot{x} - 2\dot{x} = \text{sen } 3t$

q) $\ddot{x} - 2\dot{x} = e^t$

r) $\ddot{x} - 2\dot{x} = e^{2t}$

s) $\ddot{x} - 2\dot{x} = 5$

2. Resolva a equação $\ddot{x} + \omega^2 x = \text{sen } \omega t$, onde $\omega \neq 0$ é um real dado. *(Ressonância)*

3. Determine a solução do problema

a) $\ddot{x} + 4x = \cos t$, $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$.

b) $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = e^{-3t}$, $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

c) $\ddot{x} + 4x = \cos 2t$, $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

d) $\ddot{x} + 4x = 5e^{3t}$, $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

4. Determine uma solução particular de

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = b\,\text{sen } \omega t$$

onde γ, ω_0, b e ω são constantes não-nulas dadas.

5. Resolva a equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = b\,\text{sen } \omega t$$

onde ω_0, b e ω são constantes não-nulas dadas.

6

Os Espaços $\mathbb{R}^n$

6.1. Introdução

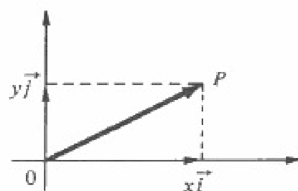
Nosso objetivo, neste capítulo, é introduzir no $\mathbb{R}^2$ os conceitos de *norma* e de *conjunto aberto*, que generalizam os conceitos de módulo e de intervalo aberto, e que serão fundamentais em tudo o que veremos a seguir. O símbolo $\mathbb{R}^2$ está sendo usado aqui para indicar o conjunto de todos os pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \text{ reais}\}$.

Para as interpretações geométricas e físicas será muito útil pensar um par ordenado (x, y) como um vetor do plano. Para isto, fixaremos no plano um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas (o habitual) e identificaremos, então, o par (x, y) com o vetor $\overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do sistema e P o ponto de coordenadas (x, y). Esta identificação nos sugerirá como *somar* pares ordenados e como *multiplicar um par ordenado por um escalar* a partir das operações sobre vetores, que suporemos conhecidas.

O leitor não terá dificuldade alguma em generalizar os conceitos deste capítulo para o $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, onde $\mathbb{R}^n$ indica o conjunto de todas as n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais.

6.2. O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^2$

Identificando (x, y) com o vetor $\overrightarrow{OP}$ e indicando por $\vec{i}$ e $\vec{j}$ os vetores associados, respectivamente, a $(1, 0)$ e $(0, 1)$ resulta da teoria dos vetores que $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



É imediato que se λ é um escalar, isto é, um número real, então, $\lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1}$, onde P_1 é o ponto de coordenadas $(\lambda x, \lambda y)$. Por outro lado, se $\overrightarrow{OQ}$ é o vetor associado a (s, t) e se $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, então $\overrightarrow{OR}$ é o vetor associado a $(x + s, y + t)$ (verifique). Tudo isto sugere-nos a seguinte definição.

Definição. Sejam (x, y) e (s, t) dois elementos quaisquer do $\mathbb{R}^2$ e λ um real qualquer. Definimos:

a) $(x + s, y + t)$ é a *soma* de (x, y) com (s, t): $(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t)$.
b) $(\lambda x, \lambda y)$ é o *produto de* (x, y) *pelo escalar* λ : $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
c) $(x, y) + (-1)(s, t)$ é a *diferença* de (x, y) e (s, t) : $(x, y) - (s, t) = (x, y) + (-1)(s, t)$.
d) $(x, y) = (s, t) \Leftrightarrow x = s$ e $y = t$.

As seguintes propriedades são de imediata verificação: quaisquer que sejam (x, y), (s, t) e (u, v) em $\mathbb{R}^2$ e quaisquer que sejam as escalares α e β tem-se:

A1) $[(x, y) + (s, t)] + (u, v) = (x, y) + [(s, t) + (u, v)]$
A2) $(x, y) + (s, t) = (s, t) + (x, y)$
A3) $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$
A4) $(x, y) + (-1)(x, y) = (0, 0)$
M1) $\alpha[\beta(x, y)] = \alpha\beta(x, y)$
M2) $\alpha[(x, y) + (s, t)] = \alpha(x, y) + \alpha(s, t)$
M3) $[\alpha + \beta](x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$
M4) $1 \cdot (x, y) = (x, y)$.

Observação. Uma estrutura de *espaço vetorial* sobre um conjunto não-vazio V fica determinada quando se definem em V duas operações, uma de *adição* e outra de *multiplicação de um elemento de V por um escalar*, satisfazendo as oito propriedades acima listadas. As operações anteriormente definidas determinam, então, sobre o $\mathbb{R}^2$ uma estrutura de espaço vetorial real; seus elementos podem, então, ser chamados de *vetores*.

6.3. Produto Escalar. Perpendicularismo

Definição 1. O número

$$a_1a_2 + b_1b_2$$

denomina-se *produto escalar* dos vetores (a_1, b_1) e (a_2, b_2) e indica-se por $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$. Assim,

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1a_2 + b_1b_2.$$

EXEMPLO 1. O produto escalar dos vetores $(2, 3)$ e $(1, 5)$ é

$$(2, 3) \cdot (1, 5) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 17.$$

Observe que o produto escalar de dois vetores é um número.

Sejam os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3)$ e seja λ um escalar; são de verificação imediata as seguintes propriedades do produto escalar:

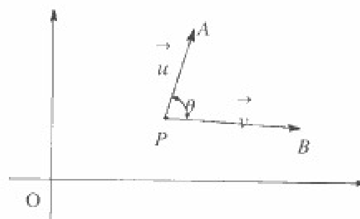
(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (*comutativa*)

(ii) $[\vec{u} + \vec{v}] \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ (*distributiva*)

(iii) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$.

(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$; $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = (0, 0)$.

Estamos interessados, a seguir, em definir *perpendicularismo* ou *ortogonalismo* entre vetores do $\mathbb{R}^2$. Consideremos os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2)$. Vamos olhar estes dois vetores aplicados no ponto $P = (x, y)$ do plano.



A e B são extremidades de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente. Temos

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \vec{u} = (x, y) + (a_1, b_1) = (x + a_1, y + b_1)$$

e

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \vec{v} = (x, y) + (a_2, b_2) = (x + a_2, y + b_2).$$

Assim,

$$A = (x + a_1, y + b_1) \text{ e } B = (x + a_2, y + b_2).$$

Vamos, agora, aplicar a lei dos cossenos ao triângulo APB para determinar $\cos \theta$. Temos

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 - 2\, \overline{AP} \cdot \overline{PB} \cos \theta$$

onde $\overline{AB}$ é a distância de A a B, $\overline{AP}$ de A a P e $\overline{PB}$ de P a B. Como

$$\overline{AB} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2},$$

$$\overline{AP} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

e

$$\overline{PB} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

segue que

$$(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\cos \theta$$ e, portanto,

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\cos \theta$$

ou seja,

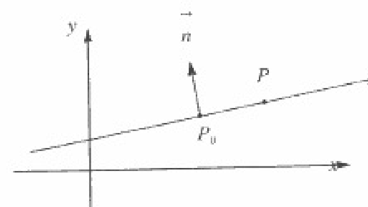
$$\boxed{\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

Daí, os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2)$ serão *perpendiculares* se e somente se o *produto escalar* de (a_1, b_1) com (a_2, b_2) for nulo. Nada mais natural, então, do que a seguinte definição.

Definição 2. Dizemos que os vetores (a_1, b_1) e (a_2, b_2) são *perpendiculares* ou *ortogonais* se

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = 0.$$

Vejamos como fica, em notação de produto escalar, a equação da reta r que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e que é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (a, b) \neq (0, 0)$. Vamos olhar $\vec{n}$ como um vetor aplicado no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$.



O ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r se e somente se o vetor $P - P_0$ for perpendicular a $\vec{n} = (a, b)$. Assim, a equação da reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (a, b)$ é

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

ou seja,

$$(a, b) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0.$$

De $(x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0)$, segue que a equação acima é equivalente a

$$ax + by = c$$

com $c = ax_0 + by_0$. E $\vec{n} = (a, b)$ é um *vetor perpendicular* à tal reta.

EXEMPLO 2. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e que é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (-1, 3)$.

Solução

A equação da reta é

$$\vec{n} \cdot [P - P_0] = 0$$

onde $\vec{n} = (-1, 3)$, $P = (x, y)$ e $P_0 = (1, 2)$. Assim, a equação da reta é

$$(-1, 3) \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$$

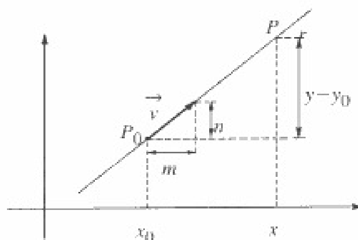
ou

$$-(x - 1) + 3(y - 2) = 0$$

ou ainda

$$-x + 3y - 5 = 0.$$

Consideremos, agora, o vetor $\vec{v} = (m, n)$, com $(m, n) \neq (0, 0)$, aplicado no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$. Na figura seguinte, representamos a reta r que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e que tem a direção do vetor $\vec{v} = (m, n)$.



Por semelhança de triângulos, para todo $P = (x, y)$ na reta r, existe t tal que

$$\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn. \end{cases}$$

Pois bem,

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

são as *equações paramétricas* da reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e é *paralela à direção do vetor* $\vec{v} = (m, n)$. Em notação vetorial, esta reta pode ser expressa na forma

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(m, n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 3. Determine a equação, na forma vetorial, da reta que passa pelo ponto $(3, -1)$ e que é perpendicular à reta $2x - 3y = 7$.

Solução

$\vec{n} = (2, -3)$ é perpendicular à reta $2x - 3y = 7$.

O que queremos, então, é a reta que passa pelo ponto $(3, -1)$ e que seja paralela ao vetor $(2, -3)$. Assim, a equação da reta pedida é

$$(x, y) = (3, -1) + t(2, -3), t \in \mathbb{R}.$$

No $\mathbb{R}^3$, os conceitos de produto escalar e de ortogonalismo são análogos aos do $\mathbb{R}^2$:

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

$$(a_1, b_1, c_1) \perp (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = 0.$$

No espaço, a equação vetorial da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e que é paralela à direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), t \in \mathbb{R}.$$

A *equação do plano* que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que é *perpendicular* à direção do vetor $\vec{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ é

$$(a, b, c) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$$

ou

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0.$$

Observe que o plano de equação

$$ax + by + cz = d$$

é perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (a, b, c)$.

Exercícios 6.3

1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e que seja paralela à direção do vetor $\vec{v} = (-1, 1)$.
2. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, -1)$ e que é perpendicular à reta $2x + y = 1$.
3. Determine um vetor cuja direção seja paralela à reta $3x + 2y = 2$.
4. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e que seja paralela à reta $3x + 2y = 2$.

5. Determine um vetor cuja direção seja paralela à reta dada.

$a)$ $x - 2y = 3$ $b)$ $x + y = 1$

$c)$ $2x - 5y = 4$ $d)$ $x + 2y = 3$

6. Determine um vetor cuja direção seja perpendicular à reta dada.

$a)$ $2x + y = 1$ $b)$ $3x - y = 3$

$c)$ $x + 3y = 2$ $d)$ $2x - 3y = 1$.

7. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja paralela à reta dada.

$a)$ $(2, -5)$ e $x - y = 1$ $b)$ $(1, -2)$ e $2x + y = 3$.

8. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular à reta dada.

$a)$ $(1, 2)$ e $2x + y = 3$ $b)$ $(2, -2)$ e $x + 3y = 1$.

9. Determine a equação do plano que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular à direção do vetor $\vec{n}$ dado.

$a)$ $(1, 1, 1)$ e $\vec{n} = (2, 1, 3)$ $b)$ $(2, 1, -1)$ e $\vec{n} = (-2, 1, 2)$

10. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular ao plano dado.

$a)$ $(0, 1, -1)$ e $x + 2y - z = 3$ $b)$ $(2, 1, -1)$ e $2x + y + 3z = 1$

11. Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$. Definimos o *produto vetorial de* $\vec{u}$ *por* $\vec{v}$, que se indica $\vec{u} \wedge \vec{v}$, por

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2)\,\vec{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Verifique que

$a)$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

$b)$ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

$c)$ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, onde $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$

$d)$ $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

12. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, 2, -1)$ e que seja perpendicular às direções dos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

13. Determine um vetor não-nulo que seja ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados.

$a)$ $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 2)$

$b)$ $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 1)$

14. Determine a equação do plano que passa pelo ponto dado e que seja paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados.

$a)$ $(1, 2, 1)$, $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -1)$

$b)$ $(0, 1, 2)$, $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$

15. Sejam dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, com $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$. Verifique que

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s\,\vec{u} + t\,\vec{v} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

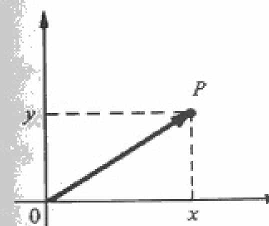
é a equação vetorial do plano que passa por (x_0, y_0, z_0) e que é perpendicular a $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

6.4. NORMA DE UM VETOR. PROPRIEDADES

Definição. O número

$$\| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

denomina-se *norma* do vetor (x, y).



A norma de (x, y) é o comprimento do vetor $\overrightarrow{0P}$.

De $(x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2$, segue $\| (x, y) \| = \sqrt{(x, y) \cdot (x, y)}$.

Teorema 1. (Desigualdade de Schwarz) Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

Demonstração

Para todo t real,

$$(\vec{u} + t\,\vec{v}) \cdot (\vec{u} + t\,\vec{v}) \geq 0.$$

Pela distributividade do produto escalar,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} + 2t\,\vec{u} \cdot \vec{v} + t^2\,\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$$

e como $\vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \|^2$ resulta, para todo t,

$$\| \vec{u} \|^2 + 2t \vec{u} \cdot \vec{v} + t^2 \| \vec{v} \|^2 \geq 0;$$

logo,

$$\Delta = (2 \vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4 \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \leq 0$$

e, portanto,

$$| \vec{u} \cdot \vec{v} | \leq \| \vec{u} \| \| \vec{v} \|. \blacksquare$$

Segue do teorema acima que quaisquer que sejam os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ tem-se

$$-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|} \leq 1.$$

Portanto, existe um único número real θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|} \text{ ou } \vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos \theta.$$

Este número real θ denomina-se *ângulo* entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Teorema 2. Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ e qualquer que seja o escalar λ tem-se:

N1) $\| \vec{u} \| \geq 0$; $\| \vec{u} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = (0, 0)$.
N2) $\| \lambda \vec{u} \| = |\lambda| \, \| \vec{u} \|$.
N3) (*Desigualdade triangular*)

$$\| \vec{u} + \vec{v} \| \leq \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|.$$

Demonstração

N1) Imediata.
N2) Pondo $\vec{u} = (x, y)$ tem-se

$$\| \lambda \vec{u} \| = \| \lambda(x, y) \| = \| (\lambda x, \lambda y) \| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}.$$

Logo,

$$\| \lambda \vec{u} \| = | \lambda | \sqrt{x^2 + y^2}$$

ou seja,

$$\| \lambda \vec{u} \| = |\lambda| \, \| \vec{u} \|.$$

N3) $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \| \vec{u} \|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{v} \|^2$.

Pela desigualdade de Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \| \vec{u} \| \| \vec{v} \|.$$

Então,

$$\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 \leq \| \vec{u} \| + 2\| \vec{u} \| \| \vec{v} \| + \| \vec{v} \|^2 = (\| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|)^2$$

logo,

$$\| \vec{u} + \vec{v} \| \leq \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|. \quad \blacksquare$$

Exercícios 6.4

1. Generalize para o $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) os conceitos e resultados desta seção.
2. Calcule a norma do vetor dado.

   a) $\vec{u} = (1, 2)$ *b)* $\vec{v} = (2, 1, 3)$

   c) $\vec{u} = (0, 1, 2)$ *d)* $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

3. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\| \vec{u} \| \geq | u_i |$, $i = 1, 2, 3$.
4. Seja $\vec{u} = (u_1, u_3, \dots, u_n)$ um vetor do $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Mostre que $\| \vec{u} \| \geq | u_i |$, $i = 1, 2, \dots, n$.
5. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ dois vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$. Verifique que

   a) $\| \vec{u} - \vec{v} \| \geq \| \vec{u} \| - \| \vec{v} \|$.
   b) $\| \vec{u} - \vec{v} \| \geq \| \vec{v} \| - \| \vec{u} \|$.
   c) $\| \vec{u} - \vec{v} \| \geq | \| \vec{u} \| - \| \vec{v} \| |$.

6. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\| \vec{u} - \vec{v} \| \geq | u_i - v_i |, \; i = 1, 2, \dots, n.$$

7. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$. Prove:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

8. Seja $\vec{u}$ um vetor qualquer do $\mathbb{R}^n$. Prove que se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, então $\vec{u} = \vec{0}$.

9. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores do $\mathbb{R}^n$ tais que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, com α e β reais. Suponha $\vec{u}$ e $\vec{v}$ unitários ($\|\vec{u}\| = 1$ e $\|\vec{v}\| = 1$) e ortogonais. Prove que $\alpha = \vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\beta = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

10. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *linearmente independentes* se, quaisquer que sejam os reais α e β, se $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha = \beta = 0$. Prove que $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ são linearmente independentes se e somente se $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

11. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$. Prove que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente independentes, então existirão (e serão únicos) reais α e β tais que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

12. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários e ortogonais do $\mathbb{R}^2$. Prove que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes.

13. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários e ortogonais do $\mathbb{R}^2$. Prove que para todo $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$ tem-se: $\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u})\, \vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\, \vec{v}$.

14. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Dizemos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são *linearmente independentes* se, quaisquer que sejam os reais α, β e γ, se $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$, então $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Prove que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ são linearmente independentes se e somente se $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

15. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{r}$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^3$, com $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ linearmente independentes. Prove que $\vec{r}$ é *combinação linear* de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, isto é, que existem reais α, β e γ tais que $\vec{r} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$.

16. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores unitários quaisquer de $\mathbb{R}^3$, sendo dois a dois ortogonais. Prove que para todo $\vec{r}$ do $\mathbb{R}^3$ tem-se:

$$\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{u})\, \vec{u} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\, \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{w})\, \vec{w}.$$

17. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos do $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$, onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

18. Prove que quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^3$

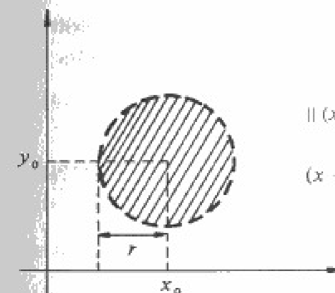
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|.$$

6.5. Conjunto Aberto. Ponto de Acumulação

Sejam (x_0, y_0) um ponto do $\mathbb{R}^2$ e $r > 0$ um real. O conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$$

denomina-se *bola aberta* de centro (x_0, y_0) e raio r.



$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$

No plano, a bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r é o conjunto de todos os pontos "internos" ao círculo de centro (x_0, y_0) e raio r.

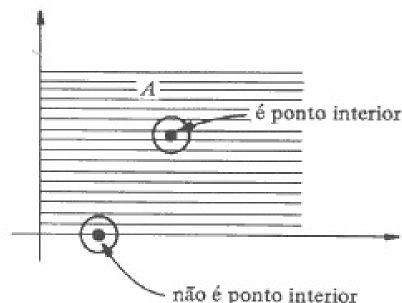
Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $(x_0, y_0) \in A$ é um *ponto interior* de A se existir uma bola aberta de centro (x_0, y_0) contida em A.

EXEMPLO 1. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

a) Todo (x, y), com $x > 0$ e $y > 0$, é *ponto interior* de A.
b) Todo (x, y), com $x = 0$ ou $y = 0$, *não é ponto interior* de A.

De fato,

a) se $(x, y) \in A$, com $x > 0$ e $y > 0$, então a bola aberta de centro (x, y) e raio $r = \min\{x, y\}$ está contida em A; logo, (x, y) é ponto interior de A.
b) se $(x, y) \in A$, com $x = 0$ ou $y = 0$, então (x, y) não é ponto interior de A, pois A não contém nenhuma bola aberta de centro (x, y).



Definição. Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que A é um *conjunto aberto* se todo ponto de A for ponto interior.

Observação. Por definição, o conjunto vazio é um conjunto aberto.

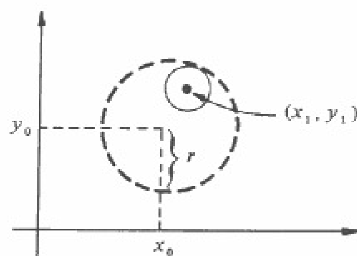
EXEMPLO 2. Toda bola aberta é um conjunto aberto.

Solução

Seja B uma bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r. Precisamos mostrar que todo ponto (x_1, y_1) de B é ponto interior. Seja, então, α a distância de (x_1, y_1) a (x_0, y_0), isto é,

$$\alpha = \| (x_1, y_1) - (x_0, y_0) \|.$$

Vamos mostrar que a bola aberta $\overline{B}$ de centro (x_1, y_1) e raio r_1, com $0 < r_1 < r - \alpha$, está contida em B.



$$(x, y) \in \overline{B} \Leftrightarrow \| (x, y) - (x_1, y_1) \| < r_1.$$

Seja, então, $(x, y) \in \overline{B}$; temos

$$\begin{aligned} \| (x, y) - (x_0, y_0) \| &= \| (x, y) - (x_1, y_1) + (x_1, y_1) - (x_0, y_0) \| \\ &\leq \| (x, y) - (x_1, y_1) \| + \| (x_1, y_1) - (x_0, y_0) \| < r_1 + \alpha < r. \end{aligned}$$

Logo, $(x, y) \in$ B. Portanto, $\overline{B}$ está contido em B.

EXEMPLO 3.

a) $\mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto.
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ não é aberto.
c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$ é aberto.

Solução

a) Imediato.
b) Os pontos $(x, y) \in A$, com $x = 0$ ou $y = 0$, não são pontos interiores; logo, A não é aberto.
c) Se $(x, y) \in A$, a bola aberta de centro (x, y) e raio $r = \text{mín}\{x, y\}$ está contida em A; logo, A é aberto.

Definição. Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ e seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ((a, b) pode pertencer ou não a A). Dizemos que (a, b) é *ponto de acumulação de A se toda* bola aberta de centro (a, b) contiver pelo menos um ponto $(x, y) \in A$, com $(x, y) \neq (a, b)$.

Grosso modo, dizer que (a, b) é ponto de acumulação de A significa dizer que existem pontos de A, distintos de (a, b), tão próximos de (a, b) quanto se queira.

EXEMPLO 4. Todo (x, y), com $x \geq 0$ e $y \geq 0$, é ponto de acumulação do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$; o ponto $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ não é ponto de acumulação de A, pois existe uma bola aberta de centro $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ que não contém ponto de A.

EXEMPLO 5. O conjunto $A = \{(1, 2), (-1, 0), (1, 3)\}$ não admite ponto de acumulação, pois qualquer que seja o ponto (a, b) de $\mathbb{R}^2$, existe uma bola aberta de centro (a, b) e raio r que não contém ponto de A *distinto* de (a, b). (Se (a, b) não pertence a A, basta tomar r como sendo a menor das distâncias de (a, b) aos pontos $(1, 2)$, $(-1, 0)$ e $(1, 3)$; se $(a, b) \in A$, basta tomar $r = \frac{1}{2}$).

Exercícios 6.5

1. Verifique quais dos conjuntos a seguir são aberto em $\mathbb{R}^2$.
   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x + y > 3\}$
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ e } 1 < y < 3\}$
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 < 0\}$
   f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 3 \text{ e } x^2 + y^2 < 16\}$
   g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$
   h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y > \frac{1}{2}\}$
2. Determine o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto dado.
   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ inteiros}\}$

c) $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) \mid n \neq 0 \text{ natural}\right\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 1 < y < 2\}$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ racionais}\}$

3. Defina bola aberta de centro (x_0, y_0, z_0) e raio $r > 0$ no $\mathbb{R}^3$. Interprete geometricamente.

4. Defina bola aberta, conjunto aberto e ponto de acumulação no $\mathbb{R}^n$.

5. Sejam A e B dois subconjuntos do $\mathbb{R}^2$. Prove que se A e B forem abertos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ também serão.

6. Suponha que, para cada natural n, A_n é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$. Seja B a reunião de todos os A_n e C a intersecção de todos os A_n. Pergunta-se: B é aberto? C é aberto? Justifique.

7. Seja F um subconjunto do $\mathbb{R}^2$. Dizemos que F é um *conjunto fechado* se o conjunto de todos os (x, y) não-pertencentes a F for aberto. Verifique quais dos conjuntos a seguir são fechados.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y > 0\}$.
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ inteiros}\}$.
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ racionais}\}$.
e) ϕ
f) $\mathbb{R}^2$
g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 1 \leq y \leq 3\}$
h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 1 \leq y < 3\}$

8. Suponha que o conjunto B, $B \subset \mathbb{R}^2$, não seja aberto. Pode-se concluir que B é fechado? Sim ou não? Justifique.

9. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto *limitado* se existir um $m > 0$ tal que $\|(x, y)\| < m$ para todo $(x, y) \in A$. Prove que se A for limitado e se A contiver um número infinito de pontos, então A admitirá pelo menos um ponto de acumulação. A afirmação continua verdadeira se uma das hipóteses for omitida?

7

FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES EM $\mathbb{R}^n$. CURVAS

7.1. FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES EM $\mathbb{R}^2$

Uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^2$ é uma função $F: A \to \mathbb{R}^2$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma tal função associa a cada real $t \in A$, um único vetor $F(t) \in \mathbb{R}^2$. O conjunto A é o domínio de F e será indicada por D_F. Suporemos sempre que A ou é um intervalo ou uma reunião de intervalos. O conjunto

$$Im\, F = \{F(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in D_F\}$$

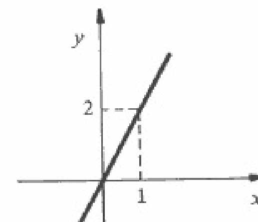
é a *imagem* ou *trajetória* de F. A imagem de F é o lugar geométrico, em $\mathbb{R}^2$, descrito por $F(t)$ quando t varia em D_F.

EXEMPLO 1. Seja F a função dada por $F(t) = (t, 2t)$.

a) Calcule $F(0)$ e $F(1)$.
b) Desenhe a imagem de F.

Solução

a) $F(0) = (0, 0)$ e $F(1) = (1, 2)$.

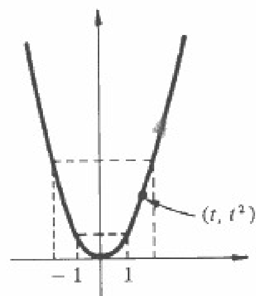


b) A imagem de F é a reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

EXEMPLO 2. Desenhe a imagem da função F dada por $F(t) = (t, t^2)$.

Solução

A imagem de F é a curva de equações paramétricas $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

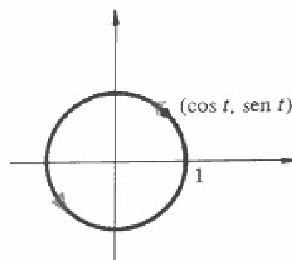


A imagem de F coincide com o gráfico da parábola $y = x^2$.

EXEMPLO 3. Seja $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Desenhe a imagem de F.

Solução

A imagem de F é a circunferência de centro na origem e raio 1.



EXEMPLO 4. Seja $F(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$. Desenhe a imagem de F.

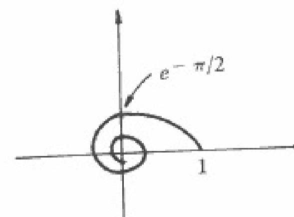
Solução

$$F(t) = e^{-t} (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$\| F(t) \| = \sqrt{(e^{-t} \cos t)^2 + (e^{-t} \operatorname{sen} t)^2}$$

ou seja,

$$\| F(t) \| = e^{-t}.$$

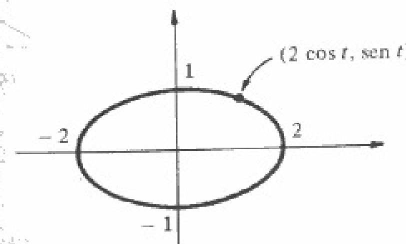


Quando t varia em $[0, +\infty[$, o ponto $F(t)$ gira em torno da origem e a distância à origem tende a zero para t tendendo a $+\infty$. Observe que a imagem de F coincide com o gráfico da espiral $\rho = e^{-\theta}$, $\theta \geq 0$ (coordenadas polares).

EXEMPLO 5. Desenhe a imagem da função F dada por $F(t) = (2 \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solução

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$



Assim, para cada $t \in [0, 2\pi]$ o ponto $(2 \cos t, \operatorname{sen} t)$ pertence à elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Por outro lado, para cada (x, y) na elipse, existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \text{(por quê?)}$$

Exercícios 7.1

Desenhe a imagem:

1. $F(t) = (1, t)$
2. $F(t) = (t, t + 1)$
3. $F(t) = (2t - 1, t + 2)$
4. $F(t) = (t, t^3)$

5. $F(t) = (t^2, t)$
6. $F(t) = (t^2, t^4)$
7. $F(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t)$
8. $F(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$
9. $F(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$
10. $F(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$
11. $F(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t), t \geq 0$
12. $F(t) = (\operatorname{sen} t, t)$

7.2. Função de uma Variável Real a Valores em $\mathbb{R}^3$

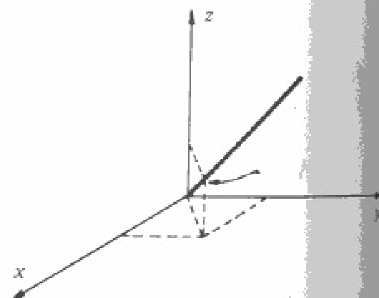
Uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^3$ é uma função $F: A \to \mathbb{R}^3$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma tal função associa, a cada $t \in A$, um único vetor $F(t) \in \mathbb{R}^3$. A imagem ou trajetória de F é o lugar geométrico, em $\mathbb{R}^3$, descrito por $F(t)$, quando t varia em D_F.

EXEMPLO 1. Desenhe a imagem de $F(t) = (t, t, t), t \geq 0$.

Solução

A imagem de F é a semi-reta de equações paramétricas

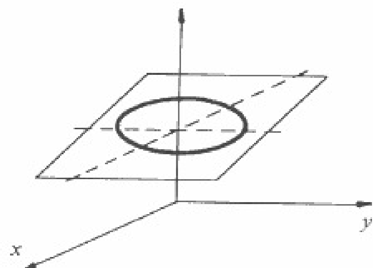
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \quad t \geq 0 \\ z = t \end{cases}$$



EXEMPLO 2. Desenhe a imagem de $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$.

Solução

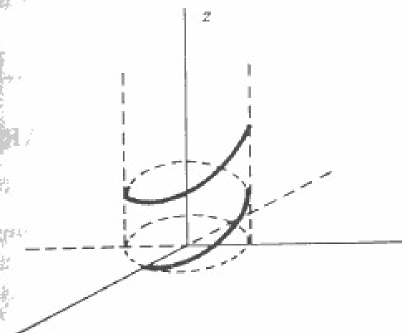
A imagem de F é uma circunferência situada no plano $z = 1$, com centro no eixo Oz e raio 1.



EXEMPLO 3. Desenhe a imagem de $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, bt), t \geq 0$, onde $b > 0$ é um real fixo.

Solução

A imagem de F é uma hélice circular reta. Quando t varia em $[0, +\infty[$, a projeção de $F(t)$, sobre o plano xy, descreve a circunferência $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, ao passo que a projeção sobre o eixo Oz descreve um movimento uniforme, com equação $z = bt$.



Muitas vezes será necessário considerar funções de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$, $n > 3$. Os próximos exemplos exibem funções de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^4$ e em $\mathbb{R}^5$, respectivamente.

EXEMPLO 4. $F(t) = (t, t^2, 1, t^2), t \in \mathbb{R}$, é uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^4$.

EXEMPLO 5. $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2, t, t^3), t \in \mathbb{R}$, é uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^5$.

Exercícios 7.2

1. Desenhe a imagem:

a) $F(t) = (1, t, 1), t \in \mathbb{R}$
b) $F(t) = (1, 1, t), t \geq 0$
c) $F(t) = (t, t, 1), t \geq 0$
d) $F(t) = (1, 0, t), t \in \mathbb{R}$
e) $F(t) = (t, t, 1 + \operatorname{sen} t), t \geq 0$
f) $F(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t), t \geq 0$
g) $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$
h) $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^{-t}), t \geq 0$
i) $F(t) = \left(t, t, \frac{1}{t}\right), t > 0$
j) $F(t) = (t, t, t^2), t \geq 0$
l) $F(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t}), t \geq 0$
m) $F(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$
n) $F(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, t), t \geq 0$
o) $F(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

2. Seja F dada por $F(t) = (\ln t, t, \sqrt{1 - t^2}, t^2)$.

a) Determine o domínio de F.

b) Calcule $F\left(\frac{3}{5}\right)$.

3. Determine o domínio.

a) $F(t) = \left(t, \sqrt{\frac{t-2}{t+1}}, \ln(5-t^2), e^{-t}\right)$.

b) $F(t) = \left(2, \frac{1}{t}, \sqrt[4]{2-t^2}, \text{arctg } t\right)$.

7.3. Operações com Funções de uma Variável Real a Valores em $\mathbb{R}^n$

Seja $F: A \to \mathbb{R}^n$ uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$; então existem, e são únicas, n funções a valores reais $F_i: A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, tais que, qualquer que seja $t \in A$,

$$F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)).$$

Tais funções são denominadas *funções componentes* de F. Escreveremos $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ para indicar a função cujas componentes são $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

EXEMPLO 1. Seja $F(t) = (\cos t, \text{sen } t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. As componentes de F são as funções F_1, F_2, F_3 definidas em $\mathbb{R}$ e dadas, respectivamente, por $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$ e $z = t$.

EXEMPLO 2. Seja $F(t) = (t, \sqrt{t}, \text{sen } 3t, \text{arctg } t)$, $t \geq 0$. As componentes de F são as funções F_1, F_2, F_3, F_4 dadas por $F_1(t) = t$, $F_2(t) = \sqrt{t}$, $F_3(t) = \text{sen } 3t$ e $F_4(t) = \text{arctg } t$, com $t \geq 0$.

Sejam $F, G: A \to \mathbb{R}^n$ duas funções de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$ uma função a valores reais e k uma constante. Definimos:

a) a função $F + G: A \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$(F+G)(t) = F(t) + G(t)$$

denomina-se *soma* de F e G.

b) a função $kF: A \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$(kF)(t) = kF(t)$$

é o *produto de F pela constante k*.

c) a função $f \cdot F: A \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$(f \cdot F)(t) = f(t)F(t)$$

é o *produto de F pela função escalar f*.

d) a função $F \cdot G: A \to \mathbb{R}$ dada por

$$(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$$

onde $F(t) \cdot G(t) = F_1(t) \cdot G_1(t) + F_2(t) \cdot G_2(t) + \ldots + F_n(t) \cdot G_n(t)$, é o *produto escalar* de F e G. Estamos supondo aqui $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ e $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$.

e) Seja $n = 3$. A função $F \wedge G: A \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(F \wedge G)(t) = F(t) \wedge G(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \end{vmatrix}$$

denomina-se *produto vetorial* de F e G, onde

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \end{vmatrix} = [F_2(t)G_3(t) - F_3(t)G_2(t)]\,\vec{i} +$$

$$+ [F_3(t)G_1(t) - F_1(t)G_3(t)]\,\vec{j} + [F_1(t)G_2(t) - F_2(t)G_1(t)]\,\vec{k}.$$

(Veja Exerc. 11 da Seç. 6.3).

EXEMPLO 3. Sejam as funções F, G e f, definidas em $\mathbb{R}$, e dadas por $F(t) = (\cos 3t, \text{sen } 2t, t^2)$, $G(t) = (3, t^3, \text{arctg } t)$ e $f(t) = e^{-2t}$. Temos

a) o produto escalar de F e G é a função H dada por

$$H(t) = F(t) \cdot G(t) = 3\cos 3t + t^3 \text{ sen } 2t + t^2 \text{ arctg } t.$$

b) o produto de F pela função escalar f é a função com valores em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$f(t)F(t) = e^{-2t}(\cos 3t, \text{sen } 2t, t^2) = (e^{-2t}\cos 3t, e^{-2t}\text{sen } 2t, e^{-2t}t^2).$$

c) O produto vetorial de F e G é a função a valores em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$(F \wedge G)(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos 3t & \text{sen } 2t & t^2 \\ 3 & t^3 & \text{arctg } t \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{sen } 2t \text{ arctg } t - t^5)\,\vec{i} + (3t^2 - \cos 3t \text{ arctg } t)\,\vec{j} + (t^3\cos 3t - 3 \text{ sen } 2t)\,\vec{k}.$$

Uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$ será freqüentemente indicada com a notação vetorial $\vec{F}$.

EXEMPLO 4. Sejam as funções $\vec{F}$ e $\vec{G}$ dadas por $\vec{F}(t) = (t, t^2, 2)$ e $\vec{G}(t) = (3, t, t)$. Calcule

a) $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$

b) $t\vec{F}(t)$

c) $\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)$

d) $2\vec{F}(t) + 3\vec{G}(t)$.

Solução

a) $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 3t + t^3 + 2t = 5t + t^3$.

b) $t\vec{F}(t) = t(t, t^2, 2) = (t^2, t^3, 2t)$.

c) $\vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & t^2 & 2 \\ 3 & t & t \end{vmatrix} = (t^3 - 2t)\,\vec{i} + (6 - t^2)\,\vec{j} + (t^2 - 3t^2)\,\vec{k}$

ou seja,

$$\vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t) = (t^3 - 2t)\,\vec{i} + (6 - t^2)\,\vec{j} - 2t^2\,\vec{k}.$$

d) $2\vec{F}(t) + 3\vec{G}(t) = 2(t, t^2, 2) + 3(3, t, t) = (2t + 9, 2t^2 + 3t, 4 + 3t)$.

Exercícios 7.3

1. Sejam $\vec{F}(t) = (t, \text{sen}\, t, 2)$ e $\vec{G}(t) = (3, t, t^2)$. Calcule

   a) $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)$ *b)* $e^{-t}\vec{F}(t)$

   c) $\vec{F}(t) - 2\vec{G}(t)$ *d)* $\vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t)$

2. Calcule $\vec{r}(t)\wedge\vec{x}(t)$, onde $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$ e $\vec{x}(t) = t\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

3. Calcule $\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)$, onde $\vec{u}(t) = \text{sen}\, t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ e $\vec{v}(t) = \text{sen}\, t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$.

4. Sejam $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ três funções definidas em $A \subset \mathbb{R}$ e a valores em $\mathbb{R}^3$. Verifique que

   a) $\vec{F}\wedge\vec{G} = -\vec{G}\wedge\vec{F}$ *b)* $\vec{F}\cdot(\vec{G} + \vec{H}) = \vec{F}\cdot\vec{G} + \vec{F}\cdot\vec{H}$

   c) $\vec{F}\wedge(\vec{G} + \vec{H}) = \vec{F}\wedge\vec{G} + \vec{F}\wedge\vec{H}$

7.4. Limite e Continuidade

Antes de definirmos limites faremos a seguinte observação: sempre que estivermos lidando com função de *uma variável real* ficará subentendido que o domínio ou é um *intervalo* ou *uma reunião de intervalos*.

Definição 1. Seja F uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$ e seja t_0 um ponto do domínio de F ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de F. Dizemos que $F(t)$ *tende a* L, $L \in \mathbb{R}^n$, *quando* t *tende a* t_0, e escrevemos $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$, se para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in D_F$,

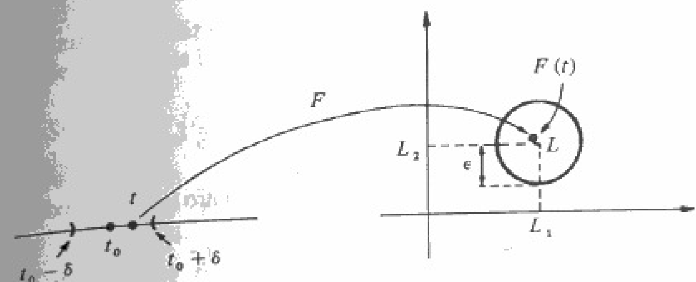
$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|F(t) - L\| < \epsilon.$$

Observação

$$\|F(t) - L\| < \epsilon \Leftrightarrow F(t) \in B_\epsilon(L)$$

onde $B_\epsilon(L)$ é a bola aberta de centro L e raio ϵ: $B_\epsilon(L) = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y - L\| < \epsilon\}$.

A figura seguinte nos dá uma visão geométrica do significado de $\lim_{t\to t_0} F(t) = L$ no caso $n = 2$:



dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $F(t)$ permanece na bola aberta $B_\epsilon(L)$ quando t percorre o intervalo $]\,t_0 - \delta, t_0 + \delta\,[$, $t \neq t_0$ e $t \in D_F$.

EXEMPLO 1. Seja F uma função de uma variável com valores em $\mathbb{R}^n$ e seja $L \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} \|F(t) - L\| = 0.$$

Solução

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, t \in D_F \\ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|F(t) - L\| < \epsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, t \in D_F \\ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\|F(t) - L\| - 0| < \epsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \lim_{t\to t_0} \|F(t) - L\| = 0. \right.$$

O exemplo acima nos diz que se $F(t)$ *tende a* L, *para* $t \to t_0$, *então a distância de* $F(t)$ *a* L ($\|F(t) - L\|$) *tende a zero, para* $t \to t_0$, *e reciprocamente.*

Antes de demonstrar o próximo teorema, lembramos que se $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então, para $i = 1, 2, \ldots, n$, $\|\vec{X}\| \geq |x_i|$, ou seja, o *comprimento de* $\vec{X}$ *é maior ou igual ao módulo de qualquer uma de suas componentes* (veja Exerc. 4 — 6.4).

Seja, agora, $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ uma função de uma variável com valores em $\mathbb{R}^n$ e seja $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$; temos

$$F(t) - L = (F_1(t) - L_1, F_2(t) - L_2, \ldots, F_n(t) - L_n).$$

Do que vimos acima, resulta:

$$\|F(t) - L\| \geq |F_i(t) - L_i| \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

O próximo teorema nos diz que $\lim_{t\to t_0} F(t)$ existirá se e somente se existirem e forem finitos os limites das componentes F_i de F. Além disso, se, para $i = 1, 2, \ldots, n$, acontecer $\lim_{t\to t_0} F_i(t) = L_i$, então $\lim_{t\to t_0} F(t) = L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$.

Teorema. Sejam $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ uma função de uma variável com valores em $\mathbb{R}^n$ e $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} F_i(t) = L_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstração

Vamos provar primeiro a implicação

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = L \Rightarrow \lim_{t \to t_0} F_i(t) = L_i.$$

De $\lim_{t \to t_0} F(t) = L$ segue que $\lim_{t \to t_0} \| F(t) - L \| = 0$. Por outro lado, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$| F_i(t) - L_i | \leq \| F(t) - L \|.$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{t \to t_0} (F_i(t) - L_i) = 0 \text{ ou } \lim_{t \to t_0} F_i(t) = L_i.$$

Reciprocamente, de $\lim_{t \to t_0} F_i(t) = L_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, segue que

$$\lim_{t \to t_0} \sqrt{(F_1(t) - L_1)^2 + (F_2(t) - L_2)^2 + \ldots + (F_n(t) - L_n)^2} = 0$$

e, portanto, $\lim_{t \to t_0} \| F(t) - L \| = 0$; logo,

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = L. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 1. Seja $\vec{F}(t) = \frac{\text{sen } t}{t} \vec{i} + (t^2 + 3) \vec{j}$. Calcule $\lim_{t \to 0} \vec{F}(t)$.

Solução

$$\lim_{t \to 0} \vec{F}(t) = \left(\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} \right) \vec{i} + \left(\lim_{t \to 0} (t^2 + 3) \right) \vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j}.$$

EXEMPLO 2. Seja $\vec{F}(t) = (\cos t, \text{sen } t, t)$. Calcule $\lim_{h \to 0} \frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h}$.

Solução

$$\frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h} = \left(\frac{\cos(t+h) - \cos t}{h}, \frac{\text{sen}(t+h) - \text{sen } t}{h}, 1 \right).$$

De

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(t+h) - \cos t}{h} = -\text{sen } t \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(t+h) - \text{sen } t}{h} = \cos t$$

segue

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h} = (-\text{sen } t, \cos t, 1).$$

O próximo exemplo nos diz que o limite de um produto escalar é igual ao produto escalar dos limites, desde que tais limites existam.

EXEMPLO 3. Sejam $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ e $\vec{G} = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ duas funções de uma variável com valores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{a} \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_0} \vec{G}(t) = \vec{b}$$

onde $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Mostre que

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Solução

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = F_1(t)\, G_1(t) + F_2(t)\, G_2(t) + \ldots + F_n(t)\, G_n(t).$$

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{a} \Rightarrow \lim_{t \to t_0} F_i(t) = a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\lim_{t \to t_0} \vec{G}(t) = \vec{b} \Rightarrow \lim_{t \to t_0} G_i(t) = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Então

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = \lim_{t \to t_0} F_1(t)\, G_1(t) + \ldots + \lim_{t \to t_0} F_n(t)\, G_n(t)$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Definição 2. Sejam $F : A \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in A$. Definimos:

$$F \textit{ é contínua em } t_0 \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0).$$

Dizemos que F é *contínua em* $B \subset A$ se F for contínua em todo $t \in B$; dizemos, simplesmente, que F é *contínua* se for contínua em cada t de seu domínio.

Do teorema anterior, resulta que F *será contínua em* t_0 *se e somente se cada componente de* F *o for.*

Exercícios 7.4

1. Calcule

a) $\lim_{t \to 1} \vec{F}(t)$, onde $\vec{F}(t) = \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \frac{t - 1}{t} \right)$

b) $\lim_{t \to 0} \vec{F}(t)$, onde $\vec{F}(t) = \left(\frac{\text{tg } 3t}{t}, \frac{e^{2t} - 1}{t}, t^3 \right)$

c) $\lim_{t \to 2} \vec{r}(t)$, onde $\vec{r}(t) = \frac{t^3 - 8}{t^2 - 4} \vec{i} + \frac{\cos \frac{\pi}{t}}{t - 2} \vec{j} + 2t\, \vec{k}$.

2. Sejam $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, $\vec{G} = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ duas funções de uma variável real a valores em $\mathbb{R}^n$ e f uma função de uma variável real a valores reais. Suponha que $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{a}$, $\lim_{t \to t_0} \vec{G}(t) = \vec{b}$ e $\lim_{t \to t_0} f(t) = L$, onde $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ e L real. Prove:
   a) $\lim_{t \to t_0} [\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = \vec{a} + \vec{b}$.
   b) $\lim_{t \to t_0} f(t)\,\vec{F}(t) = L\,\vec{a}$.
   c) $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \vec{a} \wedge \vec{b}$ $(n = 3)$.
3. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.
   a) $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + \sqrt{t}\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$.
   b) $\vec{F}(t) = \sqrt{t-1}\,\vec{i} + \sqrt{t+1}\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$.
4. Sejam $\vec{F}, \vec{G} : A \to \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ contínuas em $t_0 \in A$. Prove que $\vec{F} + \vec{G}$, $f\vec{F}$, $\vec{F} \cdot \vec{G}$ são contínuas em t_0. Se $n = 3$, $\vec{F} \wedge \vec{G}$ também é contínua em t_0.
5. Sejam $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ e $\vec{G} : A \to \mathbb{R}^3$. Suponha $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{0}$ e que $\|\vec{G}(t)\| \leq M$ para todo $t \in A$, onde $M > 0$ é um real fixo. Prove.
   a) $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 0$
   b) $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \vec{0}$
6. Seja $\vec{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ contínua. Prove que existe $M > 0$ tal que $\|\vec{F}(t)\| \leq M$ em $[a, b]$.

7.5. DERIVADA

Definição 1. Sejam $F : A \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in A$. Definimos a *derivada de F* em t_0 por

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

desde que o limite exista.

Se F admite derivada em t_0, então diremos que F é *derivável* ou *diferenciável* em t_0. Dizemos que F é *derivável* em $B \subset D_F$ se o for em cada $t \in B$. Dizemos, simplesmente, que F é *derivável* ou *diferenciável* se o for em cada ponto de seu domínio.

Teorema 1. Sejam $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ e t_0 pertencente ao domínio de F. Então, F será derivável em t_0 se e somente se cada componente de F o for; além disso, se F for derivável em t_0

$$F'(t_0) = (F_1'(t_0), F_2'(t_0), \ldots, F_n'(t_0)).$$

Demonstração

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{F_2(t) - F_2(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \frac{F_n(t) - F_n(t_0)}{t - t_0} \right), t \neq t_0.$$

Pelo teorema da seção anterior, $\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ existirá se e somente se existirem e forem finitos os limites $\lim_{t \to t_0} \frac{F_i(t) - F_i(t_0)}{t - t_0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo, F será derivável em t_0 se e somente se cada componente o for. Teremos então:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \lim_{t \to t_0} \frac{F_n(t) - F_n(t_0)}{t - t_0} \right)$$

ou seja,

$$F'(t_0) = (F_1'(t_0), F_2'(t_0), \ldots, F_n'(t_0)). \quad ■$$

EXEMPLO 1. Seja $\vec{F}(t) = (\text{sen}\,3t, e^{t^2}, t)$. Calcule

a) $\frac{d\vec{F}}{dt}(t)$ b) $\frac{d\vec{F}}{dt}(0)$

Solução

a) $\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = ((\text{sen}\,3t)', (e^{t^2})', (t)') = (3\cos 3t, 2te^{t^2}, 1)$

ou seja,

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = (3\cos 3t, 2te^{t^2}, 1).$$

b) $\frac{d\vec{F}}{dt}(0) = (3, 0, 1)$.

EXEMPLO 2. Seja $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + \text{arctg}\,2t\,\vec{j} + e^{-t}\,\vec{k}$. Calcule.

a) $\frac{d\vec{r}}{dt}$ b) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

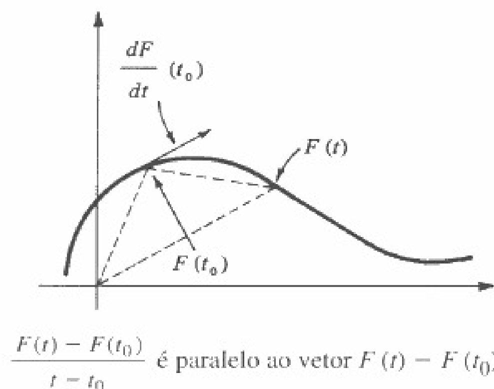
Solução

a) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2)\,\vec{i} + \frac{d}{dt}(\text{arctg}\,2t)\,\vec{j} + \frac{d}{dt}(e^{-t})\,\vec{k}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\vec{i} + \frac{2}{1+4t^2}\,\vec{j} - e^{-t}\,\vec{k}.$$

b) $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\,\vec{i} - \frac{16t}{(1+4t^2)^2}\,\vec{j} + e^{-t}\,\vec{k}.$$

Seja, agora, $F: A \to \mathbb{R}^2$ e seja $t_0 \in A$. Geometricamente, vemos $\frac{dF}{dt}(t_0)$ como um "*vetor tangente*" à trajetória de F, no ponto $F(t_0)$.



$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ é paralelo ao vetor $F(t) - F(t_0)$

Quando $t \to t_0$, $\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ tende ao "vetor tangente" $\frac{dF}{dt}(t_0)$ à trajetória de F em $F(t_0)$.

Definição 2. Seja $F: A \to \mathbb{R}^n$ derivável em t_0, com $\frac{dF}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$. Dizemos que $\frac{dF}{dt}(t_0)$ é um *vetor tangente* à trajetória de F, em $F(t_0)$. A reta

$$X = F(t_0) + \lambda\,\frac{dF}{dt}(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

denomina-se *reta tangente* à trajetória de F no ponto $F(t_0)$.

A reta tangente à trajetória de F no ponto $F(t_0)$ é, então, por definição, a *reta passando pelo ponto* $F(t_0)$ e paralela ao vetor tangente $\frac{dF}{dt}(t_0)$.

EXEMPLO 3. Seja $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$. Determine a equação da reta tangente à trajetória de F no ponto $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Solução

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\frac{dF}{dt} = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$; assim, $\frac{dF}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

A equação da reta tangente em $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é:

$$X = F\left(\frac{\pi}{4}\right) + \lambda\,\frac{dF}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Faça você o desenho da trajetória de F e da reta tangente.

EXEMPLO 4. Seja $F(t) = (t, t, t^2)$. Determine a equação da reta tangente no ponto $F(1)$.

Solução

$F(1) = (1, 1, 1)$; $\frac{dF}{dt} = (1, 1, 2t)$; assim, $\frac{dF}{dt}(1) = (1, 1, 2)$. A equação da reta tangente em $F(1)$ é:

$$X = F(1) + \lambda\,\frac{dF}{dt}(1),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2. Sejam $\vec{F}, \vec{G}: A \to \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$ deriváveis em A. Então, $f \cdot \vec{F}$ e $\vec{F} \cdot \vec{G}$ serão, também, deriváveis em A e

a) $$\frac{d}{dt}(f \cdot \vec{F}) = \frac{df}{dt} \cdot \vec{F} + f \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}.$$

b) $$\frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{dt}.$$

Além disso, se $n = 3$, então $\vec{F} \wedge \vec{G}$ será, também, derivável em A e

c) $$\frac{d}{dt}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \wedge \vec{G} + \vec{F} \wedge \frac{d\vec{G}}{dt}.$$

Demonstração

Faremos a demonstração no caso $n = 3$.

a) $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$; como f é uma função a valores reais

$$f(t)\,\vec{F}(t) = (f(t)\,F_1(t), f(t)\,F_2(t), f(t)\,F_3(t))$$

para todo $t \in A$.

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{F}(t)] = \left(\frac{d}{dt}[f(t)F_1(t)], \frac{d}{dt}[f(t)F_2(t)], \frac{d}{dt}[f(t)F_3(t)]\right)$$

De

$$\frac{d}{dt}[f(t)F_1(t)] = f'(t)F_1(t) + f(t)F_1'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)F_2(t)] = f'(t)F_2(t) + f(t)F_2'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)F_3(t)] = f'(t)F_3(t) + f(t)F_3'(t)$$

resulta:

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{F}(t)] = f'(t)\left(F_1(t), F_2(t), F_3(t)\right) + f(t)\left(F_1'(t), F_2'(t), F_3'(t)\right)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(f\vec{F}) = \frac{df}{dt}\vec{F} + f\frac{d\vec{F}}{dt}.$$

b) $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ e $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$.

$$\vec{F}\cdot\vec{G} = F_1G_1 + F_2G_2 + F_3G_3.$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{F}\cdot\vec{G}] = \frac{d}{dt}[F_1G_1] + \frac{d}{dt}[F_2G_2] + \frac{d}{dt}[F_3G_3] = \frac{dF_1}{dt}G_1 + F_1\frac{dG_1}{dt} +$$

$$+ \frac{dF_2}{dt}G_2 + F_2\frac{dG_2}{dt} + \frac{dF_3}{dt}G_3 + F_3\frac{dG_3}{dt}.$$

Como

$$\frac{d\vec{F}}{dt}\cdot\vec{G} = \frac{dF_1}{dt}G_1 + \frac{dF_2}{dt}G_2 + \frac{dF_3}{dt}G_3$$

e

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{G}}{dt} = F_1\frac{dG_1}{dt} + F_2\frac{dG_2}{dt} + F_3\frac{dG_3}{dt}$$

resulta

$$\frac{d}{dt}[\vec{F}\cdot\vec{G}] = \frac{d\vec{F}}{dt}\cdot\vec{G} + \vec{F}\cdot\frac{d\vec{G}}{dt}.$$

c) $$\frac{d(\vec{F}\wedge\vec{G})}{dt}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(t+h)\wedge\vec{G}(t+h) - \vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(t+h)\wedge\vec{G}(t+h) - \vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t+h) + \vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t+h) - \vec{F}(t)\wedge\vec{G}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h}\wedge\vec{G}(t+h) + \vec{F}(t)\wedge\frac{\vec{G}(t+h) - \vec{G}(t)}{h}\right]$$

$$= \frac{d\vec{F}}{dt}(t)\wedge\vec{G}(t) + \vec{F}(t)\wedge\frac{d\vec{G}}{dt}(t)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}[\vec{F}\wedge\vec{G}] = \frac{d\vec{F}}{dt}\wedge\vec{G} + \vec{F}\wedge\frac{d\vec{G}}{dt}. \quad ■$$

EXEMPLO 5. Seja $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$ derivável e tal que $\|\vec{F}(t)\| = k$, $\forall\, t \in A$, k constante. Prove que

$$\vec{F}(t)\cdot\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in A$. Interprete geometricamente no caso $n = 2$.

Solução

$$\|\vec{F}(t)\| = \sqrt{\vec{F}(t)\cdot\vec{F}(t)}$$

daí

$$\|\vec{F}(t)\|^2 = \vec{F}(t)\cdot\vec{F}(t);$$

logo, para todo $t \in A$,

$$\vec{F}(t)\cdot\vec{F}(t) = k^2.$$

Segue que, para todo t em A,

$$\frac{d}{dt}[\vec{F}(t)\cdot\vec{F}(t)] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t)\cdot\vec{F}(t) + \vec{F}(t)\cdot\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = 0$$

e como o produto escalar é comutativo

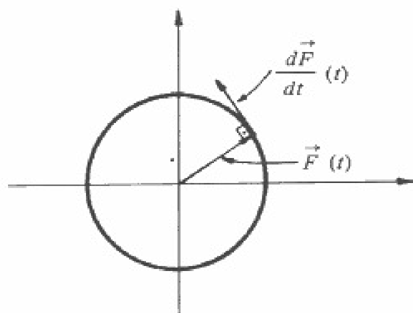
$$2\vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}(t) = 0.$$

Portanto, para todo $t \in A$,

$$\vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}(t) = 0.$$

Assim, *sendo* $\|\vec{F}(t)\|$ *constante, os vetores* $\vec{F}(t)$ e $\frac{d\vec{F}}{dt}(t)$ *serão ortogonais.*

Interpretação geométrica no caso $n = 2$. Seja $\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t))$; sendo $\|\vec{F}(t)\|$ constante e igual a k ($k > 0$), a trajetória descrita por $(F_1(t), F_2(t))$ está contida na circunferência de centro na origem e raio k; como $\frac{d\vec{F}}{dt}(t)$ é tangente à trajetória, $\frac{d\vec{F}}{dt}(t)$ deve ser tangente à circunferência e deve, portanto, ser ortogonal ao vetor de posição $\vec{F}(t)$.



Exercícios 7.5

1. Calcule $\frac{d\vec{F}}{dt}$ e $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}$

   a) $\vec{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, \ln(t^2 + 1))$.

   b) $\vec{F}(t) = \sqrt[3]{t^2}\,\vec{i} + \cos t^2\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$.

   c) $\vec{F}(t) = \text{sen}\,5t\,\vec{i} + \cos 4t\,\vec{j} - e^{-2t}\,\vec{k}$.

2. Determine a equação da reta tangente à trajetória da função dada, no ponto dado.

   a) $F(t) = (\cos t, \text{sen}\,t, t)$ e $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$

   b) $G(t) = (t^2, t)$ e $G(1)$

   c) $F(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^2\right)$ e $F(2)$

   d) $F(t) = (t, t^2, t, t^2)$ e $F(1)$

3. Seja F definida no intervalo I e com valores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $F'(t) = \vec{0}$ para todo t em I. Prove que existe uma constante $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(t) = k$ para todo t em I.

4. Seja $\vec{F}: I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a 2.ª ordem em I. Suponha que exista um real λ tal que, para todo t em I, $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}(t) = \lambda\vec{F}(t)$. Prove que $\vec{F}(t) \wedge \frac{d\vec{F}}{dt}(t)$ é constante em I.

5. Suponha que $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ seja derivável até a 2.ª ordem e que, para todo $t \geq 0$,

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{t}.$$

   a) Prove que $\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{r} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ em $[0, +\infty[$.

   b) Seja θ o ângulo entre $\vec{r}$ e $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Conclua que $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

6. Seja $\vec{r}$ definida em $\mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^3$, e derivável até a 2.ª ordem. Prove que se $\vec{r}(t) \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$ for constante em $\mathbb{R}$, então $\vec{r}(t) \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{0}$ em $\mathbb{R}$.

7. Seja $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a 2.ª ordem. Suponha que $\vec{r}(t)$ forneça a posição, no instante t, de um ponto P que se move no espaço. Definimos a velocidade $\vec{v}(t)$ e a aceleração $\vec{a}(t)$ de P, no instante t, por: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$ e $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)$. Determine $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ sendo:

   a) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$ *b)* $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \text{sen}\,t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$

   c) $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}\,t$, onde $\vec{r_0}$ e $\vec{v_0}$ serão dois vetores fixos em $\mathbb{R}^3$.

   d) $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}\,t + \frac{1}{2}\vec{a_0}\,t^2$, onde $\vec{r_0}$, $\vec{v_0}$ e $\vec{a_0}$ são constantes.

8. Um ponto se move no espaço de modo que $\|\vec{v}(t)\| = k$ para todo t, onde $k > 0$ é uma constante. Prove que $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$ para todo t. Interprete.

9. Suponha $\|\vec{v}(t)\| \neq 0$ para todo t. Faça $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ onde $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$. Prove que

   a) $\vec{T}$ e $\frac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais.

   b) $\vec{a} = v\,\frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\,\vec{T}$.

10. Seja $\vec{r}(t) = a\cos wt\,\vec{i} + b\,\text{sen}\,wt\,\vec{j}$, onde a, b e w são constantes não-nulas. Mostre que

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}.$$

11. Sejam $\vec{F}$ e $\vec{G}$ definidas e deriváveis no intervalo I e com valores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que para todo $t \in I$, $\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = \frac{d\vec{G}}{dt}(t)$. Prove que existe um vetor $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{G}(t) = \vec{F}(t) + \vec{c}$ para todo $t \in I$.

12. Determine $\vec{r} = \vec{r}(t)$ sabendo que

a) $\frac{d\vec{r}}{dt} = t\,\vec{i} + 2\,\vec{k}$ e $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{j}$.

b) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \text{sen}\,t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j} + \frac{1}{t+1}\vec{k}$, $t \geq 0$, e $\vec{r}(0) = \vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}$

c) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{1+4t^2}\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{r}(0) = \vec{k}$.

13. (*Regra da cadeia*). Sejam $t \to u(t)$, $t \in I$, $u \to \vec{F}(u) \in \mathbb{R}^n$, $u \in J$, funções deriváveis, onde I e J são intervalos em $\mathbb{R}$. Suponha que, para todo $t \in I$, $u(t) \in J$. Prove que a função $\vec{H}$ dada por $\vec{H}(t) = \vec{F}(u(t))$, $t \in I$, é derivável e que

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d\vec{F}}{du}\frac{du}{dt}$$

onde $\frac{d\vec{F}}{du}$ deve ser calculado em $u = u(t)$.

14. Suponha $\vec{u}_\rho(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\,\theta\,\vec{j}$, $\vec{u}_\theta(\theta) = -\text{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$ e $\vec{r}(t) = \rho(t)\,\vec{u}_\rho(\theta(t))$, com $\theta = \theta(t)$ e $\rho = \rho(t)$ deriváveis até a 2.ª ordem num intervalo I.

$\left(\text{Notação}: \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}, \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\right)$. Verifique que

a) $\frac{d}{dt}[\vec{u}_\rho(\theta)] = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta(\theta)$.

b) $\frac{d}{dt}[\vec{u}_\theta(\theta)] = -\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho(\theta)$.

c) $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

d) $\vec{a} = [\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2]\,\vec{u}_\rho + [2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}]\,\vec{u}_\theta$.

15. Seja $F: I \to \mathbb{R}^n$ derivável em $t_0 \in I$ e seja $E(\Delta t)$ o erro que se comete na aproximação do acréscimo "$F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)$" por "$F'(t_0)\,\Delta t$". Prove que $E(\Delta t)$ tende a $\vec{0}$ mais rapidamente que Δt, quando Δt tende a zero, isto é, que $\lim \frac{E(\Delta t)}{\Delta t} = \vec{0}$. Prove, ainda, que para todo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, com $\vec{a} \neq F'(t_0)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{[F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)] - \vec{a}\,\Delta t}{\Delta t} \neq \vec{0}$.

Observação. A função linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ dada por $\Delta t \to F'(t_0)\,\Delta t$ denomina-se *diferencial* de F em t_0: $F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = F'(t_0)\,\Delta t + E(\Delta t)$, onde $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E(\Delta t)}{\Delta t} = \vec{0}$.

7.6. INTEGRAL

Sejam $\vec{F}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma função, $P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b$ e, para cada i, $i = 1, 2, \ldots, m$, seja c_i um ponto de $[t_{i-1}, t_i]$. O vetor

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\,\Delta t_i$$

denomina-se *soma de Riemann* de $\vec{F}$ relativa à partição P e aos pontos c_i.

Dizemos que $\sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\,\Delta t_i$ tende ao vetor $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$, quando máx $\Delta t_i \to 0$, e escrevemos

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\,\Delta t_i = \vec{L}$$

se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ que só depende de ϵ, mas não da particular escolha dos c_i, tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\,\Delta t_i - \vec{L} \right\| < \epsilon,$$

para toda partição P de $[a, b]$ com máx $\Delta t_i < \delta$.

O vetor $\vec{L}$, que quando existe é único (verifique), denomina-se *integral* (de Riemann) de $\vec{F}$ em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b \vec{F}(t)\,dt$. Assim, por definição,

$$\boxed{\int_a^b \vec{F}(t)\,dt = \lim_{\text{máx}\,\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\,\Delta t_i}$$

Seja $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ definida em $[a, b]$. Deixamos a cargo do leitor verificar que $\vec{F}$ será integrável em $[a, b]$ se e somente se cada componente de $\vec{F}$ o for; além disso, se $\vec{F}$ for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b \vec{F}(t)\,dt = \left(\int_a^b F_1(t)\,dt, \int_a^b F_2(t)\,dt, \ldots, \int_a^b F_n(t)\,dt \right).$$

Se $\vec{F}$ for integrável em $[a, b]$ e $\vec{G}$ uma primitiva de $\vec{F}$ em $[a, b]$ teremos

$$\int_a^b \vec{F}(t)\,dt = \vec{G}(b) - \vec{G}(a).$$

De fato:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow \frac{dG_i}{dt} = F_i,\ i = 1, 2, \dots, m$$

então

$$\begin{aligned}\int_a^b \vec{F}(t)\,dt &= \left(\int_a^b F_1(t)\,dt, \int_a^b F_2(t)\,dt, \dots, \int_a^b F_n(t)\,dt\right)\\ &= (G_1(b) - G_1(a), G_2(b) - G_2(a), \dots, G_m(b) - G_n(a))\\ &= \vec{G}(b) - \vec{G}(a).\end{aligned}$$

EXEMPLO 1. Calcule $\int_0^1 [t\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}]\,dt$.

Solução

$$\begin{aligned}\int_0^1 [t\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}]\,dt &= \left(\int_0^1 t\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_0^1 4\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_0^1 t^2\,dt\right)\vec{k}\\ &= \frac{1}{2}\vec{i} + 4\,\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}.\end{aligned}$$

EXEMPLO 2. Suponha $\vec{F}$ contínua em $[a, b]$. Prove que

$$\left\|\int_a^b \vec{F}(t)\,dt\right\| \leq \int_b^a \left\|\vec{F}(t)\right\|dt.$$

Solução

Sendo $\vec{F}$ contínua em $[a, b]$, $\|\vec{F}\|$ também será; logo, $\int_a^b \|\vec{F}(t)\|dt$ existe.

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\Delta t_i - \int_a^b \vec{F}(t)\,dt\right\| \geq \left\|\sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\Delta t_i\right\| - \left\|\int_a^b \vec{F}(t)\,dt\right\|$$

assim, de

$$\lim_{\text{máx } \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\Delta t_i = \int_a^b \vec{F}(t)\,dt$$

segue

$$\lim_{\text{máx } \Delta t_i \to 0} \left\|\sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\Delta t_i\right\| = \left\|\int_a^b \vec{F}(t)\,dt\right\|.$$

Temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\Delta t_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|\vec{F}(c_i)\|\Delta t_i.$$

Então

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b \vec{F}(t)\,dt\right\| &= \lim_{\text{máx } \Delta t_i \to 0} \left\|\sum_{i=1}^{m} \vec{F}(c_i)\Delta t_i\right\| \leq\\ &\leq \lim_{\text{máx } \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} \|\vec{F}(c_i)\|\Delta t_i\\ &= \int_a^b \|\vec{F}(t)\|\,dt\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\|\int_a^b \vec{F}(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|\vec{F}(t)\|\,dt.$$

Exercícios 7.6

1. Calcule

a) $\int_0^1 [t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j}]\,dt$

b) $\int_{-1}^1 [\text{sen } 3t\,\vec{i} + \frac{1}{1+t^2}\,\vec{j} + \vec{k}]\,dt$

c) $\int_1^2 (3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k})\,dt$

2. Sejam $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + \vec{j} + e^t\,\vec{k}$ e $\vec{G}(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Calcule

a) $\int_0^1 \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)\,dt$ b) $\int_0^1 \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)\,dt$.

3. Seja $\vec{F}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ contínua e seja $\vec{G}(t) = \int_0^t \vec{F}(s)\,ds$, $t \in [a, b]$. Prove que, para todo $t \in [a, b]$,

$$\frac{d\vec{G}}{dt}(t) = \vec{F}(t).$$

4. Seja $\vec{F}(t)$ uma força, dependendo do tempo t, que atua sobre uma partícula entre os instantes t_1 e t_2. Supondo $\vec{F}$ integrável em $[t_1, t_2]$, o vetor

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

denomina-se *impulso* de $\vec{F}$ no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. Calcule o impulso de $\vec{F}$ no intervalo de tempo dado.

a) $\vec{F}(t) = t\vec{i} + \vec{j} + t^2\vec{k}$, $t_1 = 0$ e $t_2 = 2$.
b) $\vec{F}(t) = \frac{1}{t+1}\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k}$, $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$.

5. Suponha que $\vec{F}(t)$ é a força resultante que atua, no instante t, sobre uma partícula de massa m que se move no espaço. Mostre que o impulso de $\vec{F}$ no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é igual à *variação da quantidade de movimento*, isto é,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

onde $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1$ são, respectivamente, as velocidades nos instantes t_1 e t_2. (Sugestão: pela lei de Newton $\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$.)

7.7. Comprimento de Curva

Seja I um intervalo em IR. Uma *curva* γ em IR^n, definida em I, é uma função $\gamma : I \to IR^n$.
Uma curva em IR^n, definida em I, nada mais é, então, do que uma função de uma variável real a valores em IR^n. Segue que tudo o que dissemos anteriormente aplica-se às curvas.

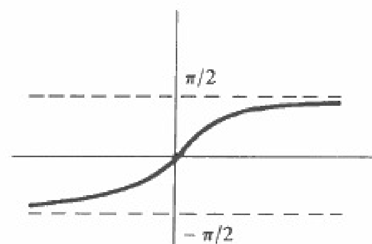
EXEMPLO 1. Seja $\gamma(t) = (t, \text{arctg } t)$, $t \in IR$, uma curva em IR^2.

a) Desenhe a imagem de γ.
b) Determine uma curva $\delta : IR \to IR^2$ tal que $\gamma \neq \delta$ e $Im\ \gamma = Im\ \delta$.

Solução

a) $\begin{cases} x = t \\ y = \text{arctg } t \end{cases}$ $t \in IR$.

A imagem de γ coincide com a gráfico de $y = \text{arctg } x$.



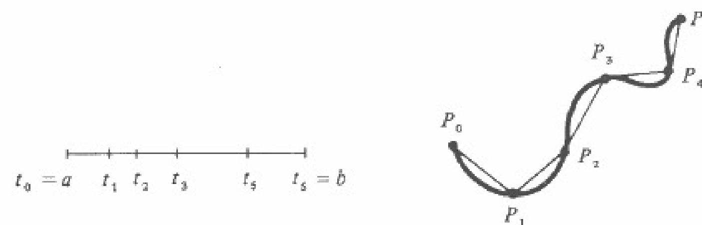
b) $\delta(t) = (t^3, \text{arctg } t^3)$, $t \in IR$.

Observação. Sejam $A \subset IR^n$ e $\gamma : I \to IR^n$ tais que $Im\ \gamma = A$; é comum referir-se a γ como uma *parametrização* do conjunto A. Assim, toda curva γ pode ser olhada como uma parametrização de sua imagem. O exemplo anterior mostra-nos que um mesmo conjunto pode admitir parametrizações diferentes.

Nosso objetivo, a seguir, é definir comprimento de curva em IR^n. Para motivar tal definição, trabalharemos com uma curva em IR^2. Seja, então, $\gamma : [a, b] \to IR^2$ uma curva em IR^2. Sendo $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$, indicaremos por $L(\gamma, P)$ o comprimento da poligonal de vértices $P_0 = \gamma(t_0)$, $P_1 = \gamma(t_1)$, ..., $P_n = \gamma(t_n)$:

$$L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|.$$

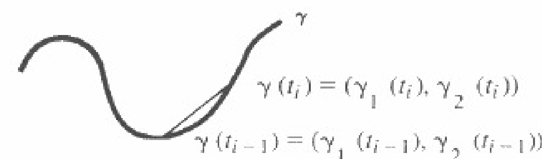
Tomando-se, por exemplo, $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 = b$, $L(\gamma, P)$ será o comprimento da poligonal de vértices $P_0 = \gamma(t_0)$, $P_1 = \gamma(t_1)$, ..., $P_5 = \gamma(t_5)$.



$$L(\gamma, P) = \| \gamma(t_1) - \gamma(t_0) \| + \| \gamma(t_2) - \gamma(t_1) \| + \ldots + \| \gamma(t_5) - \gamma(t_4) \|.$$

Suponhamos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ derivável em $[a, b]$ e seja $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Temos

① $$\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| = \sqrt{[\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})]^2 + [\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})]^2}.$$



Pelo teorema do valor médio, existem $\bar{t}_i$ e $\bar{\bar{t}}_i$ em $]t_{i-1}, t_i[$ tais que

$$\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) = \gamma_1'(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}) = \gamma_2'(\bar{\bar{t}}_i)(t_i - t_{i-1})$$

ou seja,

$$\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) = \gamma_1'(\bar{t}_i)\,\Delta t_i \quad \text{e} \quad \gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}) = \gamma_2'(\bar{\bar{t}}_i)\,\Delta t_i.$$

Substituindo em ① vem:

$$\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| = \sqrt{[\gamma_1'(\overline{t_i})]^2 + [\gamma_2'(\overline{\overline{t_i}})]^2}\ \Delta t_i.$$

Daí

$$② \qquad L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\gamma_1'(\overline{t_i})]^2 + [\gamma_2'(\overline{\overline{t_i}})]^2}\ \Delta t_i$$

Supondo γ' contínua em $[a, b]$, $\| \gamma'(t) \| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}$ será, também, contínua em $[a, b]$ e, portanto, integrável neste intervalo:

$$\int_a^b \| \gamma'(t) \|\, dt = \lim_{\text{máx } \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\gamma_1'(c_i))^2 + (\gamma_2'(c_i))^2}\ \Delta t_i.$$

Embora ② não seja soma de Riemann da função $g(t) = \| \gamma'(t) \|$, $t \in [a, b]$, (por quê?) é razoável esperar que, para máx $\Delta t_i \to 0$, $L(\gamma, P)$ tenda a $\int_a^b \| \gamma'(t) \|\, dt$ (veja Exerc. 12). Nada mais natural, então, do que a seguinte definição.

Definição. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva com derivada contínua em $[a, b]$. Definimos o *comprimento* $L(\gamma)$ da curva γ por

$$L(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(t) \|\, dt.$$

Observação. A definição acima estende-se para uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ qualquer, com $\| \gamma'(t) \|$ integrável em $[a, b]$.

EXEMPLO 2. Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solução

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1);\ \| \gamma'(t) \| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}$$

O comprimento da curva γ é

$$\int_0^{2\pi} \| \gamma'(t) \|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Seja γ uma curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

De $\dfrac{dx}{dt} = \gamma_1'(t)$ e $\dfrac{dx}{dt} = \gamma_2'(t)$ segue $\| \gamma'(t) \| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ e, então, o comprimento de γ é: $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$. Se γ for uma curva em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \\ z = \gamma_3(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

seu comprimento será:

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

EXEMPLO 3. Calcule o comprimento da curva γ dada por

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Solução

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{1}{2}} \| \gamma'(t) \|\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4t^2}\, dt.$$

Façamos a mudança de variável

$$\begin{cases} 2t = \operatorname{tg} u;\ dt = \frac{1}{2} \sec^2 u\, du \\ t = 0;\ u = 0 \\ t = \frac{1}{2};\ u = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}\ \frac{1}{2} \sec^2 u\, du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u\, du.$$

Cálculo de uma primitiva de $\sec^3 u$

$$\int \sec^3 u\, du = \int \underset{f}{\sec u}\ \underset{g'}{\sec^2 u}\, du = \sec u \operatorname{tg} u - \int \underbrace{\sec u \operatorname{tg} u}_{f'}\ \underbrace{\operatorname{tg} u}_{g}\, du$$

$$= \sec u \operatorname{tg} u - \int \sec u (\sec^2 u - 1)\, du$$

ou seja,

$$2 \int \sec^3 u\, du = \sec u \operatorname{tg} u + \int \sec u\, du$$

e, portanto,

$$\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2} \sec u \operatorname{tg} u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + k.$$

Segue que

$$L(\gamma) = \frac{1}{4} [\sec u \operatorname{tg} u + \ln (\sec u + \operatorname{tg} u)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

ou seja,

$$L(\gamma) = \frac{1}{4}[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

EXEMPLO 4. Calcule o comprimento da circunferência de raio $R > 0$.

Solução

$\gamma(t) = (R\cos t, R\,\text{sen}\,t),\ t \in [0, 2\pi]$.

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\,\text{sen}\,t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt.$$

Assim,

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}\,dt$$

ou seja,

$$L(\gamma) = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Exercícios 7.7

1. Calcule o comprimento da curva dada.

a) $\gamma(t) = (t\cos t, t\,\text{sen}\,t),\ t \in [0, 2\pi]$.
b) $\gamma(t) = (2t - 1, t + 1),\ t \in [1, 2]$.
c) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\,t, e^{-t}),\ t \in [0, \pi]$.
d) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\,\text{sen}\,t, e^{-t}),\ t \in [0, 1]$.
e) $\gamma(t) = (t, \ln t),\ t \in [1, e]$.
f) $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $x = 1 - \cos t,\ y = t - \text{sen}\,t$.
g) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \in [-1, 0]$. (*Observação*: trata-se da curva γ dada por $x = t,\ y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, com $t \in [-1, 0]$.)

2. Seja $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ uma curva dada em *coordenadas polares* por $\rho = \rho(\theta),\ \theta \in [\alpha, \beta]$. (*Observação*: trata-se da curva dada por $x = \rho(\theta)\cos\theta,\ y = \rho(\theta)\,\text{sen}\,\theta,\ \theta \in [\alpha, \beta]$). Supondo que $\rho = \rho(\theta)$ tenha derivada contínua, verifique que

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

3. Calcule o comprimento da curva dada em coordenadas polares (utilize o Exerc. 2).

a) $\rho = \theta,\ \theta \in [0, \pi]$ *b)* $\rho = 1 + \cos\theta,\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

c) $\rho = \text{sen}\,\theta,\ \theta \in [0, \pi]$ *d)* $\rho = e^{\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]$.

Aproveite a oportunidade e desenhe estas trajetórias (no plano xy, claro!).

4. Dê exemplos de curvas γ e δ tais que $Im\ \gamma = Im\ \delta$, mas que seus comprimentos sejam diferentes.

5. Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\delta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ duas curvas com derivadas contínuas. Suponha que exista $g : [c, d] \to [a, b]$, com derivada contínua e tal que $g'(u) > 0$ em $[c, d]$. Suponha, ainda, $g(c) = a$, $g(d) = b$ e, para todo $u \in [c, d]$, $\delta(u) = \gamma(g(u))$. Prove:

a) $Im\ \gamma = Im\ \delta$ *b)* $L(\gamma) = L(\delta)$

Observação. Se as curvas δ e γ estiverem relacionadas do modo acima descrito, então dizemos que a curva δ é obtida de γ pela *mudança de parâmetro $t = g(u)$ que conserva a orientação.*

6. Dizemos que uma curva $\delta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, com derivada contínua, está *parametrizada pelo comprimento de arco* se $\|\delta'(s)\| = 1$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$. Verifique que cada uma das curvas abaixo está parametrizada pelo comprimento de arco. Interprete o parâmetro s.

a) $\delta(s) = (\cos s, \text{sen}\,s),\ s \geqslant 0$

b) $\delta(s) = \left(R\cos\frac{s}{R}, R\,\text{sen}\,\frac{s}{R}\right),\ s \geqslant 0$, onde $R > 0$ é um real fixo.

c) $\delta(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}}\right),\ s \geqslant 0$.

7. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, com derivada contínua, e tal que $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ em $[a, b]$. Seja $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\,du$.

a) Verifique que a função $s = s(t)$ é inversível e seja $t = t(s)$ sua inversa.
b) Verifique que a curva $\delta : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ (L é o comprimento de γ) dada por

$$\delta(s) = \gamma(t(s))$$

está parametrizada pelo comprimento de arco. Dizemos que δ é a *reparametrização de γ pelo comprimento de arco.*

8. Reparametrize pelo comprimento de arco a curva γ dada.

a) $\gamma(t) = (2t + 1, 3t - 1),\ t \geqslant 0$.
b) $\gamma(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t),\ t \geqslant 0$.
c) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\,t, t),\ t \geqslant 0$.
d) $\gamma(t) = (e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\,t),\ t \geqslant 0$.

9. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva derivável até a 2.ª ordem, com $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ no intervalo I. Seja $s = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\|\,du,\ t \in I$, com t_0 fixo em I. Sejam, ainda, $\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ o versor de $\gamma'(t)$ e $\vec{t}(s)$ dada por $\vec{t}(s) = \vec{T}(t)$, onde $t = t(s)$. Mostre que

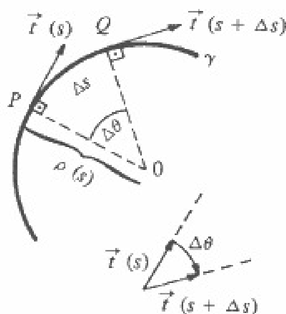
a) $$\frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \frac{\gamma''(t)\|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)(\gamma''(t) \cdot \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

b) $$\frac{d\vec{t}}{ds}(s) = \frac{\gamma''(t)\|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)(\gamma''(t) \cdot \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|^4},\ t = t(s).$$

c) $$\left\|\frac{d\vec{t}}{ds}(s)\right\| = \sqrt{\frac{d\vec{t}}{ds}(s) \cdot \frac{d\vec{t}}{ds}(s)} = \frac{\sqrt{(\|\gamma''(t)\|\,\|\gamma'(t)\|)^2 - (\gamma''(t) \cdot \gamma'(t))^2}}{\|\gamma'(t)\|^3},$$

onde $t = t(s)$.

Observação. O número $k(s) = \left\| \dfrac{d\vec{t}}{ds}(s) \right\|$ denomina-se *curvatura* da curva γ no ponto $\gamma(t)$, $t = t(s)$. Se $k(s) \neq 0$, o número $\rho(s) = \dfrac{1}{k(s)}$ é o *raio de curvatura* de γ em $\gamma(t)$, $t = t(s)$. A motivação geométrica para tal definição é a seguinte: para Δs suficientemente pequeno o trecho PQ (de comprimento Δs) da curva γ pode ser olhado como um arco de circunferência de centro 0 e raio $\rho(s)$ (aproximadamente). Sendo $\Delta\theta$ (radianos) o ângulo entre os vetores $\vec{t}(s)$ e $\vec{t}(s + \Delta s)$, segue que $\Delta\theta$ será, então, a medida do ângulo POQ.



$\Delta\theta \cong \|\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)\|$

Temos:

$$\Delta s \cong \rho(s)\,\Delta\theta \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho(s)} \cong \left\| \frac{\vec{t}(s + \Delta s) - \vec{t}(s)}{\Delta s} \right\|$$

10. Calcule a curvatura e o raio de curvatura da curva $\gamma(t) = (R\cos t, R\,\text{sen}\,t)$ ($R > 0$ fixo).

11. Seja $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco (isto é: $\|\gamma'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$).

    a) Verifique que, para todo $s \in I$, $k(s) = \|\gamma''(s)\|$, onde $k(s)$ é a curvatura em $\gamma(s)$.
    b) Prove que se $k(s) = 0$, para todo s, então γ é uma reta.

11. Uma partícula move-se no plano de modo que no instante t sua posição seja $\gamma(t)$. Suponha que, para todo t, $\|\vec{v}(t)\| \neq 0$ ($\vec{v}(t) = \gamma'(t)$) e seja $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ onde $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$. Prove que

    a) $\vec{T}$ e $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais.

    b) $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{T} + \dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$, onde $\vec{n}$ é o versor de $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ e $\rho = \rho(t)$ o raio de curvatura de γ em $\gamma(t)$.

12. Seja $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva com derivada contínua e com componentes γ_1 e γ_2 ($\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$). Seja $P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$.

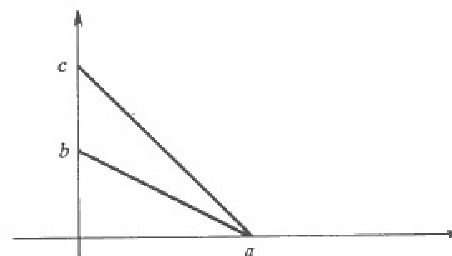
    a) Prove que quaisquer que sejam $\bar{t}_i, \bar{\bar{t}}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) tem-se:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\gamma_1'(\bar{t}_i)]^2 + [\gamma_2'(\bar{\bar{t}}_i)]^2}\,\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\gamma_1'(\bar{t}_i)]^2 + [\gamma_2'(\bar{t}_i)]^2}\,\Delta t_i \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\gamma_1'(\bar{\bar{t}}_i) - \gamma_2'(\bar{t}_i)|\,\Delta t_i$$

(*Sugestão*: utilize a desigualdade

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$$



b) Sejam $\bar{c}_i$ e $\bar{\bar{c}}_i$ os pontos de mínimo e de máximo, respectivamente, de γ_2' em $[t_{i-1}, t_i]$. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} |\gamma_1'(\bar{\bar{t}}_i) - \gamma_2'(\bar{t}_i)|\,\Delta t_i \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_2'(\bar{\bar{c}}_i)\,\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \gamma_2'(\bar{c}_i)\,\Delta t_i.$$

c) Prove que

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\gamma_1'(\bar{t}_i)]^2 + [\gamma_2'(\bar{\bar{t}}_i)]^2}\,\Delta t_i = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

$$\left(\textit{Sugestão}: \lim_{\text{máx}\,\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_2'(\bar{\bar{c}}_i)\,\Delta t_i = \lim_{\text{máx}\,\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_2'(\bar{c}_i)\,\Delta t_i = \int_a^b \gamma_2'(t)\,dt \right).$$

8

Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais

A maioria das relações que ocorrem na física, economia e, de modo geral, na natureza é traduzida por funções de duas, três e mais variáveis reais; daí a conveniência de um estudo detalhado de tais funções.

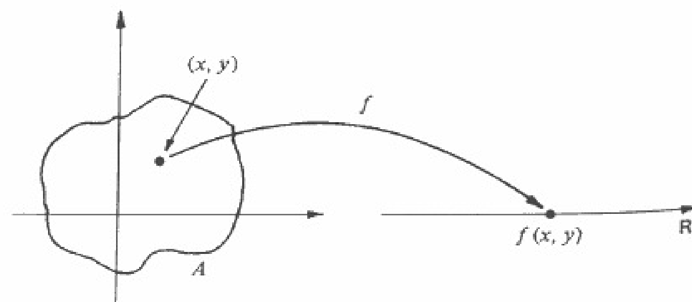
Neste capítulo e nos seguintes daremos ênfase ao estudo das funções reais de duas variáveis reais, e o leitor não terá dificuldade em generalizar os resultados para funções de mais de duas variáveis, já que não há diferenças importantes.

8.1. Funções de Duas Variáveis Reais a Valores Reais

Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f: A \to \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Uma tal função associa, a cada par $(x, y) \in A$, um único número $f(x, y) \in \mathbb{R}$. O conjunto A é o domínio de f e será indicado por D_f. O conjunto

$$Im\, f = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D_f\}$$

é a imagem de f. As palavras *aplicação* e *transformação* são sinônimas de função.



f transforma o par (x, y) no número $f(x, y)$

Por simplificação, deixaremos, muitas vezes, de especificar o domínio, ficando implícito, então, que se trata do "maior" subconjunto do $\mathbb{R}^2$ para o qual faz sentido a regra em questão.

EXEMPLO 1. Seja f a função de duas variáveis reais a valores reais dada por $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$. O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais, com $x \neq y$, isto é: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$. Esta função transforma o par (x, y) no número real $\dfrac{x+y}{x-y}$.

EXEMPLO 2. Seja f a função do exemplo anterior. Calcule

a) $f(2, 3)$ *b)* $f(a + b, a - b)$

Solução

a) $f(2, 3) = \dfrac{2+3}{2-3} = -5.$

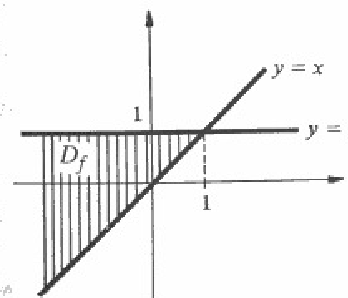
b) $f(a + b, a - b) = \dfrac{a + b + a - b}{a + b - (a - b)} = \dfrac{a}{b}.$

EXEMPLO 3. Represente graficamente o domínio da função f dada por

$$f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}.$$

Solução

O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y), com $y - x \geqslant 0$ e $1 - y \geqslant 0$: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x \text{ e } y \leqslant 1\}$.



EXEMPLO 4. Seja f a função dada por

$$(x, y) \mapsto z \text{ onde } z = 5x^2y - 3x.$$

O valor de f em (x, y) é $z = f(x, y) = 5x^2y - 3x$. Na equação acima, x e y estão sendo vistas como *variáveis independentes* e z como *variável dependente*. Observe que o domínio de f é o $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 5. Represente graficamente o domínio da função $w = f(u, v)$ dada por

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, w \geq 0.$$

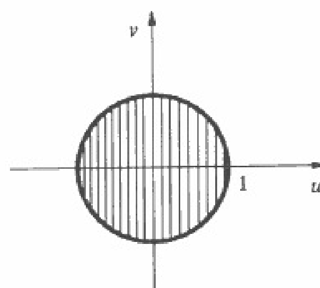
Solução

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, w \geq 0 \Rightarrow w = \sqrt{1 - u^2 - v^2}.$$

Assim, f é a função dada por $f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$. Seu domínio é o conjunto de todos (u, v), com $1 - u^2 - v^2 \geq 0$.

$$1 - u^2 - v^2 \geq 0 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \leq 1.$$

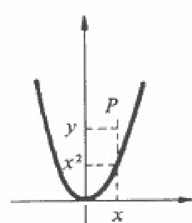
O domínio de f é o círculo de raio 1 e centro na origem.



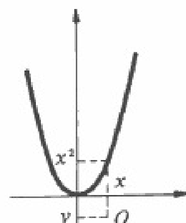
EXEMPLO 6. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por $z = \sqrt{y - x^2}$.

Solução

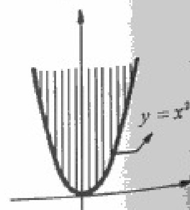
$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0\}; \; y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2.$$



$P = (x, y)$ pertence a D_f, pois $y > x^2$.



$Q = (x, y)$ não pertence a D_f, pois $y < x^2$.



A região hachurada representa o domínio de f

EXEMPLO 7. (*Função polinomial*). Uma *função polinomial* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sum_{m + n \leq p} a_{mn} x^m y^n$$

onde p é um natural fixo e os a_{mn} são números reais dados; a soma é estendida a todas as soluções (m, n), m e n naturais, da inequação $m + n \leq p$.

a) $f(x, y) = 3x^3y^2 - \frac{1}{3}xy + \sqrt{2}$ é uma função polinomial.

b) $f(x, y) = ax + by + c$, onde a, b, c são reais dados, é uma função polinomial; tal função denomina-se *função afim*.

EXEMPLO 8. (*Função linear*). Toda função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = ax + by$$

onde a, b são reais dados, denomina-se *função linear*. Toda função linear é uma função afim.

EXEMPLO 9. (*Função racional*). Toda função f dada por

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

onde p e q são funções polinomiais, denomina-se *função racional*. O domínio de f é o conjunto $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x, y) \neq 0\}$.

a) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ é uma função racional. Seu domínio é: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

b) $g(x, y) = \frac{x^2 - 3xy + 1}{x^2y^2 + 1}$ é uma função racional; $D_g = \mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 10. (*Função homogênea*). Uma função $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, denomina-se *função homogênea de grau* λ se

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$$

para todo $t > 0$ e para todo $(x, y) \in A$ tais que $(tx, ty) \in A$.

a) $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + y^2$ é homogênea de grau 2. De fato,

$$f(tx, ty) = 3(tx)^2 + 5(tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(3x^2 + 5xy + y^2)$$

ou seja,

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$$

b) $f(x, y) = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$ é homogênea de grau -1.

De fato,

$$f(tx, ty) = \frac{txe^{\frac{x}{y}}}{t^2(x^2 + y^2)} = t^{-1} f(x, y).$$

c) $f(x, y) = 2x + y + 5$ não é homogênea. (Por quê?)

Exercícios 8.1

1. Seja $f(x, y) = 3x + 2y$. Calcule

a) $f(1, -1)$ b) $f(a, x)$

c) $\dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ d) $\dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$

2. Seja $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + 2y}$.

a) Determine o domínio.
b) Calcule $f(2u + v, v - u)$.

3. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por

a) $x + y - 1 + z^2 = 0, z \geq 0$ b) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

c) $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$ d) $z = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$

e) $z^2 + 4 = x^2 + y^2, z \geq 0$ f) $z = \sqrt{|x| - |y|}$

g) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$ h) $z = \dfrac{x - y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$

4. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função linear. Sabendo que $f(1, 0) = 2$ e $f(0, 1) = 3$, calcule $f(x, y)$.

5. Verifique se a função é homogênea. Em caso afirmativo, determine o grau de homogeneidade.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$ b) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$

c) $f(x, y) = 5x^3y + x^4 + 3$ d) $f(x, y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$

6. Suponha que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seja homogênea do grau 2 e $f(a, b) = a$ para todo (a, b), com $a^2 + b^2 = 1$. Calcule

a) $f(4\sqrt{3}, 4)$ b) $f(0, 3)$ c) $f(x, y), (x, y) \neq (0, 0)$

7. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogênea e suponha que $f(a, b) = 0$ para todo (a, b), com $a^2 + b^2 = 1$. Mostre que $f(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

8. Seja $g: [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ uma função dada. Prove que existe uma única função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, homogênea de grau $\lambda \neq 0$, tal que, para todo $\alpha \in [0, 2\pi[$, $f(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha) = g(\alpha)$. (Observação: o Exerc. 8 nos diz que uma função homogênea fica completamente determinada quando se conhecem os valores que ela assume sobre os pontos de uma circunferência de centro na origem.)

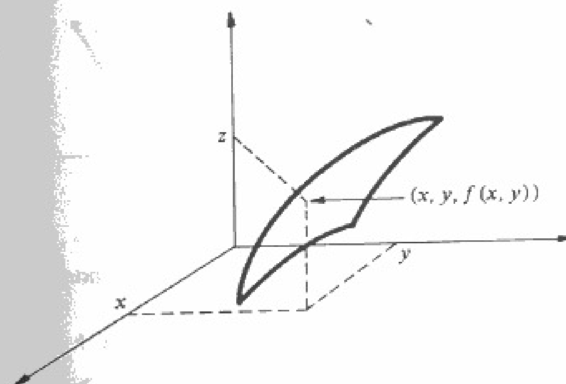
8.2. Gráfico e Curvas de Nível

Seja $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$, uma função real de duas variáveis reais. O conjunto

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in A\}$$

denomina-se *gráfico* de f.

Munindo-se o espaço de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, y, f(x, y))$, quando (x, y) percorre o domínio de f.

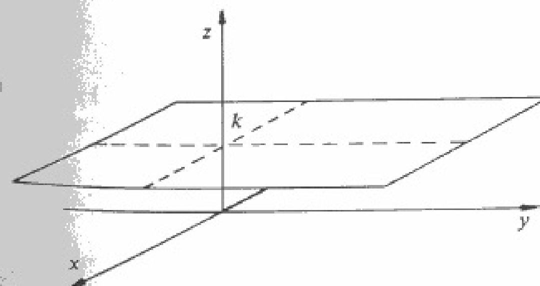


A representação geométrica do gráfico de uma função de duas variáveis não é tarefa fácil. Em vista disso, quando se pretende ter uma visão geométrica da função, lança-se mão de suas *curvas de nível*, cuja representação geométrica é sempre mais fácil de ser obtida do que o gráfico da função.

Sejam $z = f(x, y)$ uma função e $c \in Im\, f$. O conjunto de todos os pontos (x, y) de D_f tais que $f(x, y) = c$ denomina-se *curva de nível de* f correspondente *ao nível* $z = c$. Assim, f é *constante* sobre cada curva de nível.

O gráfico de f é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. *Uma curva de nível é um subconjunto do domínio de f, portanto, do* $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 1. O gráfico da função constante $f(x, y) = k$ é um plano paralelo ao plano xy.



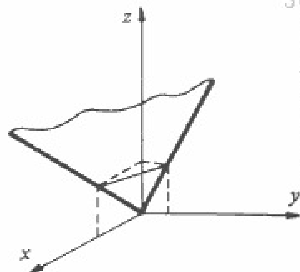
EXEMPLO 2. O gráfico da função linear dada por $z = 2x + y$ é um plano passando pe origem e normal ao vetor $\vec{n} = (2, 1, -1)$:

$$z = 2x + y \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow (2, 1, -1) \cdot [(x, y, z) - (0, 0, 0)] = 0.$$

Tal plano é determinado pelas retas

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x. \end{cases}$$

Observe que $\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$



é uma reta situada no plano yz, enquanto $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$ está situada no plano xz.

EXEMPLO 3. O gráfico da função afim f dada por $z = ax + by + c$ é um plano normal ao vetor $\vec{n} = (a, b, -1)$. Tal plano é determinado pelas retas

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = by + c \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = ax + c. \end{cases}$$

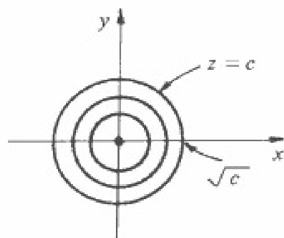
EXEMPLO 4. Desenhe as curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução

Observamos, inicialmente, que a imagem de f é o conjunto de todos os reais $z \geqslant 0$. Seja, então, $c \geqslant 0$. A curva de nível correspondente a $z = c$ é

$$f(x, y) = c \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = c.$$

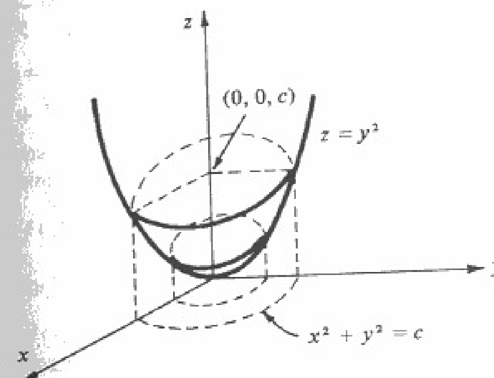
Assim, as curvas de nível ($c > 0$) são circunferências concêntricas de centro na origem. Sobre cada curva de nível $x^2 + y^2 = c$ a função assume sempre o mesmo valor c. A curva de nível correspondente a $c = 0$ é o ponto $(0, 0)$.



EXEMPLO 5. Esboce o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução

A interseção do gráfico de f com o plano $x = 0$ é a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$ localizada no plano yz. Por outro lado, a interseção do gráfico de f com o plano $z = c$ $(c > 0)$ é a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$ de centro no eixo Oz e localizada no plano $z = c$. Assim, o gráfico de f é obtido girando, em torno do eixo Oz, a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$. (Por quê?)



O gráfico de f é um *parabolóide de rotação*. Observe que a curva de nível $f(x, y) = c$ nada mais é que a projeção no plano xy da interseção do gráfico de f com o plano $z = c$.

Observação. O gráfico da função dada por $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $(a > 0$ e $b > 0)$ é uma superfície denominada *parabolóide elíptico*. Se $a = b$, temos o *parabolóide de rotação*.

EXEMPLO 6. Seja f a função dada por $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

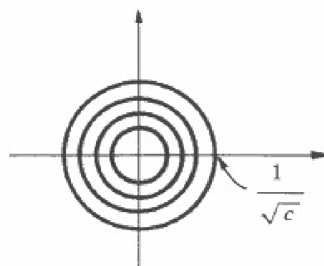
a) Determine o domínio e a imagem.
b) Desenhe as curvas de nível.
c) Esboce o gráfico.

Solução

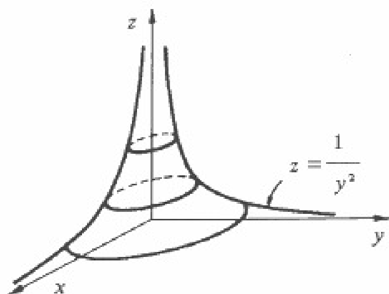
a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ e $Im\, f = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$.
b) A curva de nível correspondente a $z = c$ $(c > 0)$ é

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = c \text{ ou } x^2 + y^2 = \frac{1}{c}.$$

As curvas de nível são então circunferências concêntricas de centro na origem. Quando c tende a $+\infty$, o raio tende a zero. Por outro lado, quando c tende a zero, o raio tende a $+\infty$.



c) O plano $x = 0$ intercepta o gráfico de f segundo a curva $\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{y^2} \end{cases}$. Para cada $c > 0$, o plano $z = c$ intercepta o gráfico de f segundo a circunferência $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{c} \end{cases}$. O gráfico de f é obtido, então, girando em torno do eixo Oz, a curva $\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{y^2} \end{cases}$.



EXEMPLO 7. Considere a função f dada por $z = \frac{y}{x-1}$.

a) Determine o domínio e a imagem.
b) Desenhe as curvas de nível.

Solução

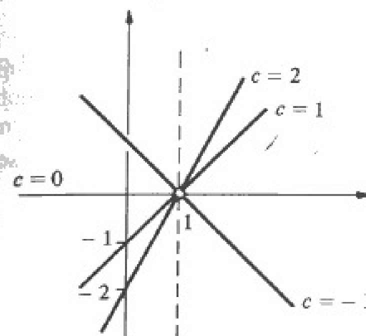
a) O domínio é o conjunto de todos (x, y), com $x \neq 1$. De $f(2, y) = y$, para todo y, segue que a imagem de f é $\mathbb{R}$. Assim

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\} \quad \text{e} \quad Im\, f = \mathbb{R}.$$

b) Para cada c real, a curva de nível correspondente a $z = c$ é

$$c = \frac{y}{x-1} \quad \text{ou} \quad y = c\,(x-1)\ (x \neq 1).$$

Cada curva de nível de f é então uma reta que passa pelo ponto $(1, 0)$ e "furada" neste ponto. Como é o gráfico de f? (*Sugestão*: pegue cada curva de nível de f e coloque-a na altura $z = c$ respectiva.)



Sejam $z = f(x, y)$ uma função e A um subconjunto de D_f. Seja $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é o *valor máximo* (resp. *valor mínimo*) de f em A se para todo $(x, y) \in A$

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \text{ (resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

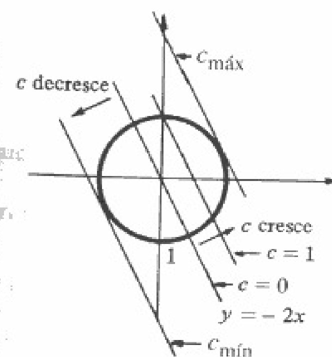
Diremos, então, que (x_0, y_0) é um *ponto de máximo* de f em A (resp. *ponto de mínimo*).

EXEMPLO 8. Sejam $f(x, y) = 2x + y$ e A o conjunto de todos (x, y) tais que $x^2 + y^2 = 1$. Raciocinando geometricamente, determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em A.

Solução

Para cada c real, a curva de nível de f correspondente a $z = c$ é a reta

①
$$c = 2x + y.$$



Indicando por $c_{máx}$ o valor máximo de f em A, a reta ① para $z = c_{máx}$ deve ser tangente à circunferência. (Por quê?) Da mesma forma, para $z = c_{mín}$ a reta ① deve ser tangente à

circunferência. Vamos então determinar c para que a reta ① seja tangente à circunferência. Devemos determinar c de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + y = c \end{cases}$$

tenha solução única. Substituindo $y = c - 2x$ em $x^2 + y^2 = 1$ obtemos

$$x^2 + (c - 2x)^2 = 1 \quad \text{ou} \quad 5x^2 - 4cx + c^2 - 1 = 0.$$

Para que o sistema tenha solução única, o discriminante deve ser igual a zero:

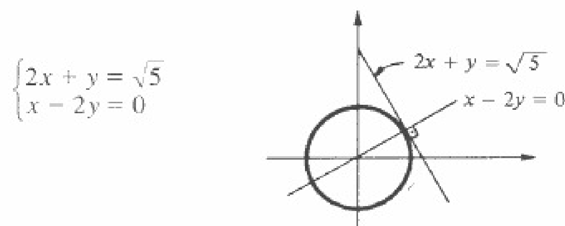
$$16c^2 - 20\,(c^2 - 1) = 0$$

ou seja,

$$c = \pm\sqrt{5}.$$

Assim, $\sqrt{5}$ é o valor máximo de f em A e $-\sqrt{5}$ o valor mínimo. Vamos, agora, determinar os pontos de máximo e de mínimo. O ponto de máximo é o ponto em que a reta $2x + y = \sqrt{5}$ tangencia a circunferência. Tal ponto é a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = \sqrt{5} \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$



onde $x - 2y = 0$ é a reta que passa pela origem e é perpendicular a $2x + y = \sqrt{5}$. O ponto de máximo é: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. Deixamos a seu cargo verificar que $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ é o ponto de mínimo.

O próximo exemplo será utilizado posteriormente.

EXEMPLO 9. Seja $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Desenhe as curvas de nível de f.
b) Determine a imagem de f.

Solução

a) Se $c = 0$, $\dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Para $c \neq 0$,

$$\frac{2xy^2}{x^2 + y^4} = c \Leftrightarrow 2xy^2 = cx^2 + cy^4 \Leftrightarrow cx^2 - 2xy^2 + cy^4 = 0.$$

Resolvendo em x obtemos

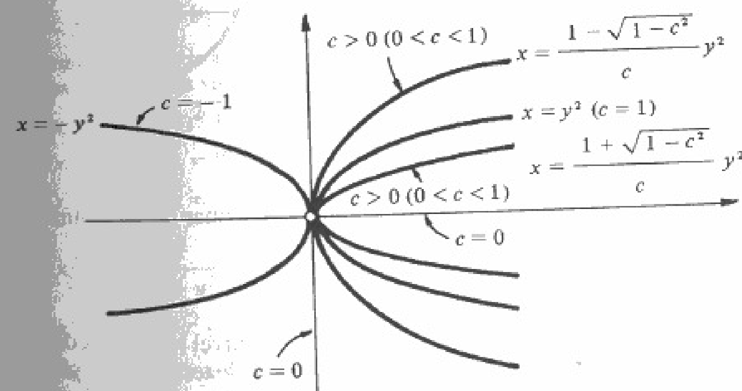
$$x = \frac{2y^2 \pm \sqrt{4y^4 - 4c^2y^4}}{2c} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - c^2}}{c}\, y^2. \; (-1 \leqslant c \leqslant 1, c \neq 0).$$

De passagem, observamos que a imagem de f é o intervalo $[-1, 1]$. (Por quê?) O valor máximo de f é 1 e é atingido em todos os pontos, diferentes de $(0, 0)$, da parábola $x = y^2$ $(c = 1)$. A curva de nível correspondente a $c \neq 0$, $-1 < c < 1$, é constituída de todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ que pertencem ou a

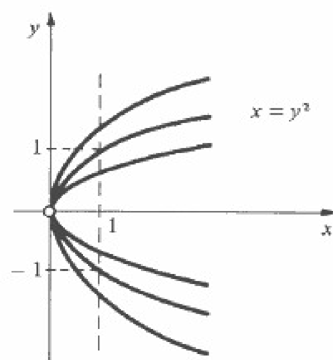
$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c}\, y^2$$

ou a

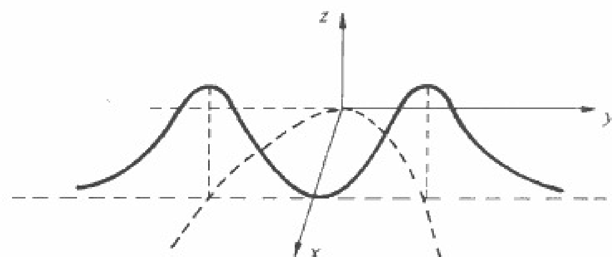
$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{c}\, y^2.$$



Observe que, à medida que c vai se aproximando de zero, a parábola de "fora", $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{c}\, y^2$, vai "abrindo" cada vez mais, enquanto $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c}\, y^2$ vai "fechando" cada vez mais. O valor mínimo de f é -1 e é atingido em todos os pontos, diferentes de $(0, 0)$, da parábola $x = -y^2$. Para ajudá-lo a visualizar o gráfico, vamos estudar, com auxílio das curvas de nível, a variação de f sobre a reta $x = 1$; o que vamos fazer, então, é estudar a variação de $f(1, y)$ quando y varia em $\mathbb{R}$: quando y varia de -1 a 0, $f(1, y)$ decresce, passando do valor 1 em $(1, -1)$ para o valor 0 em $(1, 0)$; quando y varia de 0 a 1, $f(1, y)$ cresce, passando do valor 0 em $(1, 0)$ para o valor 1 em $(1, 1)$; $f(1, y)$ é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[1, +\infty[$. Observe que $f(1, y)$ tende a zero para $y \to +\infty$ ou $y \to -\infty$.



A próxima figura mostra a interseção do gráfico de f com o plano $x = 1$. Sugerimos ao leitor desenhar a interseção do gráfico de f com o plano $x = x_0$, onde $x_0 \neq 0$ é um real qualquer.



Deu para ter uma idéia do gráfico de f? Desafio: tente desenhar ou fazer uma maquete do gráfico.

b) $Im\, f = [-1, 1]$.

Para finalizar, observamos que a denominação curva de nível varia de acordo com o que a função f representa. Por exemplo: se f é uma distribuição de temperatura plana, ($f(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y)) as curvas de nível denominam-se *isotermas* (pontos de mesma temperatura); se f é a energia potencial de um certo campo de forças bidimensional, as curvas de nível denominam-se *curvas eqüipotenciais* etc.

Exercícios 8.2

1. Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = x + 3y$

c) $z = 4x^2 + y^2$

d) $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

e) $z = x + y + 1$

f) $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

g) $f(x, y) = x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$

h) $f(x, y) = 1 - x^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $x + y \leqslant 1$

i) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

j) $z = (x - y)^2$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$

l) $z = f(x, y)$ dada por $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$

m) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $x^2 + y^2 < 1$

n) $z = \text{arctg}\,(x^2 + y^2)$

o) $f(x, y) = x$, $x \geqslant 0$

p) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$

q) $f(x, y) = \text{sen}\, x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $y \geqslant 0$

r) $f(x, y) = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

2. Desenhe as curvas de nível e determine a imagem:

a) $f(x, y) = x - 2y$

b) $z = \dfrac{y}{x - 2}$

c) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

d) $z = \dfrac{x}{y - 1}$

e) $z = xy$

f) $f(x, y) = x^2 - y^2$

g) $z = 4x^2 + y^2$

h) $z = 3x^2 - 4xy + y^2$

i) $z = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

j) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

3. Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

4. Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em A; determine, também, os pontos em que estes valores são atingidos.

a) $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 3$ e $A = \mathbb{R}^2$.

b) $f(x, y) = xy$ e $A = \mathbb{R}^2$.

c) $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0\}$.

d) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

e) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$.

(*Sugestão*. Observe que $g(y) = f(1 - 2y, y)$, $y \in \mathbb{R}$, fornece os valores de f sobre a reta $x + 2y = 1$.)

f) $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e $A = \mathbb{R}^2$.

g) $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0\}$.

5. Raciocinando geometricamente, determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em A, bem como os pontos em que estes valores são atingidos.

a) $f(x, y) = 2x + y + 3$ e A o conjunto de todo (x, y) tais que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $x + y \leqslant 2$.

b) $f(x, y) = x + y$ e A o conjunto de todos (x, y) tais que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + 2y \leqslant 7$, $2x + y \leqslant 5$ e $y \geqslant x - 1$.

c) $f(x, y) = \dfrac{y}{x - 1}$ e A o conjunto de todos (x, y) tais que $-1 \leqslant x \leqslant 0$ e $1 \leqslant y \leqslant 2$.

d) $f(x, y) = \dfrac{y}{x + 1}$ e A o círculo $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$.

6. Um ponto P descreve uma curva sobre a superfície $z = xy$ de modo que a sua projeção Q sobre o plano xy descreve a curva $x = 5 - t$, $y = t^2 + 3$ e $z = 0$. Determine as alturas máxima e mínima (em relação ao plano xy) quando t percorre o intervalo $[0, 4]$.

7. Um ponto P descreve uma curva sobre o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ de modo que a sua projeção Q sobre o plano xy descreve a reta $x + y = 1$. Determine o ponto da curva que se encontra mais próximo do plano xy. (Desenhe a trajetória descrita por P.)

8. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$. Desenhe a imagem da curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ onde $x = R\cos t$, $y = R \operatorname{sen} t$ e $z = f(x(t), y(t))$ $(R > 0)$. Como é o gráfico de f?

9. Mesmo exercício que o anterior para a função $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

10. Sejam $f(x, y) = xy$ e $\gamma(t) = (at, bt, f(at, bt))$. Desenhe a imagem de γ sendo

   a) $a = 0$ e $b = 1$. *b)* $a = 1$ e $b = 1$.

   c) $a = 1$ e $b = 0$. *d)* $a = -1$ e $b = 1$.

11. Como é o gráfico de $f(x, y) = xy$?

12. Suponha que $T(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy: $T(x, y)$ é a temperatura, que podemos supor em °C, no ponto (x, y).

   a) Desenhe a isoterma correspondente à temperatura de 36°C.
   b) Determine o ponto de mais baixa temperatura da reta $x + y = 1$.

13. Suponha que $T(x, y) = 2x + y$ (°C) represente uma distribuição de temperatura no plano xy.

   a) Desenhe as isotermas correspondentes às temperaturas: 0°C, 3°C e −1°C.
   b) Raciocinando geometricamente, determine os pontos de mais alta e mais baixa temperatura do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

14. Duas curvas de nível podem interceptar-se? Justifique.

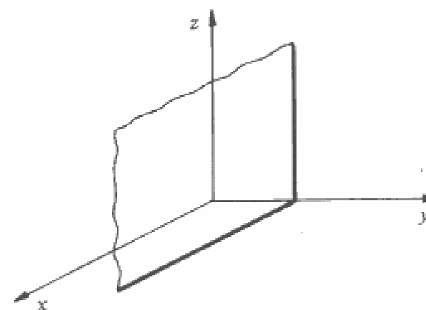
8.3. Funções de Três Variáveis Reais a Valores Reais. Superfícies de Nível

Uma função de três variáveis reais a valores reais, definida em $A \subset \mathbb{R}^3$, é uma função que associa, a cada terna ordenada $(x, y, z) \in A$, um único número real $w = f(x, y, z)$. O gráfico de tal função é o conjunto

$$G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(x, y, z), (x, y, z) \in A\}.$$

O gráfico de f é então um subconjunto do $\mathbb{R}^4$, não nos sendo possível, portanto, representá-lo geometricamente. Para se ter uma visão geométrica de tal função, podemos nos valer de suas *superfícies de nível*. Seja $c \in Im\, f$ o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in A$ tais que $f(x, y, z) = c$ denomina-se *superfície de nível* correspondente *ao nível* $w = c$.

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y, z) = y$. Para cada real c, a superfície de nível correspondente a $w = c$ é o plano $y = c$.



EXEMPLO 2. As superfícies de nível de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ são superfícies esféricas de centro na origem

$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

A superfície de nível correspondente a $c = 0$ é o ponto $(0, 0, 0)$.

Exercícios 8.3

1. Represente geometricamente o domínio da função dada.

   a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ *b)* $f(x, y, z) = \sqrt{1 - z}$

   c) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x - y - z}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$

   d) $w = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|}$ *e)* $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

2. Desenhe a superfície de nível correspondente a $c = 1$.

   a) $f(x, y, z) = x$ *b)* $f(x, y, z) = z$

   c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ *d)* $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$

3. Duas superfícies de nível de uma função f podem interceptar-se? Justifique.

9

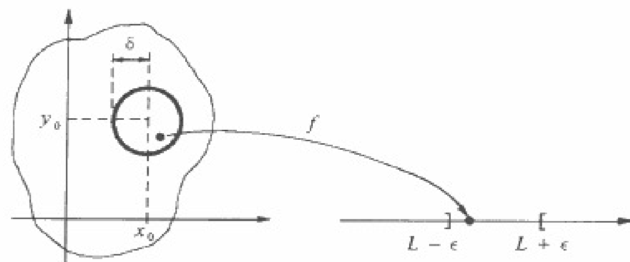
LIMITE E CONTINUIDADE

9.1. LIMITE

Esta seção é quase que uma reprodução dos tópicos abordados no Cap. 3 sobre limite de funções de uma variável real, razão pela qual a maioria dos resultados será enunciada em forma de exercícios.

Definição. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e L um número real. Definimos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que, para todo} \\ (x, y) \in D_f, \\ 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon \end{cases}$$



$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ significa: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x, y)$ permanece em $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ quando (x, y), $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, varia na bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio δ.

Observação. De agora em diante, sempre que falarmos que f tem limite em (x_0, y_0), fica implícito que (x_0, y_0) é ponto de acumulação de D_f.

EXEMPLO 1. Se $f(x, y) = k$ é uma função constante, então, para todo (x_0, y_0) em $\mathbb{R}^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k.$$

Solução

$|f(x, y) - k| = |k - k| = 0$; assim, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se um $\delta > 0$ qualquer,

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - k| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k.$$

EXEMPLO 2. Se $f(x, y) = x$, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0.$$

Solução

Para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, $|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$. (Verifique.)

Então, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon$ vem:

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon$$

ou seja,

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - x_0| < \epsilon.$$

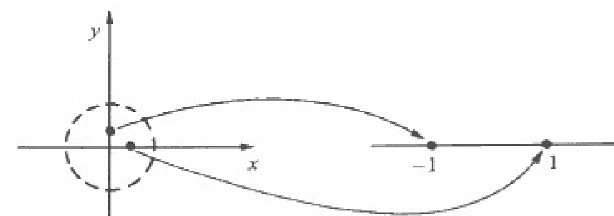
Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0.$$

EXEMPLO 3. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tem limite em $(0, 0)$? Justifique.

Solução

Inicialmente, vejamos como se comportam os valores $f(x, y)$ para (x, y) próximo de $(0, 0)$. Sobre o eixo $0x$ temos: $f(x, 0) = 1$, $x \neq 0$. Sobre o eixo $0y$, $f(0, y) = -1$, $y \neq 0$.



O estudo anterior nos mostra que não existe número L tal que $f(x, y)$ permaneça próximo de L para (x, y) próximo de $(0, 0)$; este fato indica-nos que f não deve ter limite em $(0, 0)$ e não tem mesmo, pois, qualquer que seja L, tomando-se $\epsilon = \frac{1}{2}$, tem-se:

se $L \leqslant 0, |f(x, 0) - L| \geqslant \frac{1}{2}$ para todo $x \neq 0$;

se $L > 0, |f(0, y) - L| \geqslant \frac{1}{2}$ para todo $y \neq 0$.

Assim, para todo real L, a afirmação

"$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (x, y) \in D_f, 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$"

é falsa.

Quando tivermos que provar que determinados limites não existem, o próximo exemplo poderá nos ajudar.

EXEMPLO 4. Suponha que $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$. Seja γ uma curva em $\mathbb{R}^2$, contínua em t_0, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e, para $t \neq t_0$, $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ com $\gamma(t) \in D_f$. Prove que

$$\lim_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Solução

De $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$ segue que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

① $$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Sendo γ contínua em t_0, para todo $\delta_1 > 0$ acima, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \delta_1$$

e, portanto, tendo em vista $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$ para $t \neq t_0$,

② $$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow 0 < \|\gamma(t) - (x_0, y_0)\| < \delta_1.$$

De ① e ② segue

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(\gamma(t)) - L| < \epsilon$$

ou seja,

$$\lim_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Observação. Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas nas condições do Exemplo 4. Segue do exemplo anterior que se ocorrer

③ $$\lim_{t \to t_0} f(\gamma_1(t)) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_0} f(\gamma_2(t)) = L_2$$

com $L_1 \neq L_2$, então, $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ não existirá. Da mesma forma, tal limite não existirá se um dos limites em ③ não existir.

Vejamos como provar que $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe (Exemplo 3) utilizando a observação acima. Sejam $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$. Seja $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Temos

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

e

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Logo, $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Observamos que continuam válidas para funções de duas variáveis reais a valores reais as seguintes propriedades dos limites cujas demonstrações são exatamente iguais às que fizemos para funções de uma variável real (reveja o Cap. 3 do Vol. 1).

1. **(Teorema do confronto.)** Se $f(x, y) \leqslant g(x, y) \leqslant h(x, y)$ para $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$ e se

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L = \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} h(x, y)$$

então

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} g(x, y) = L.$$

2. Se $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = 0$ e se $|g(x, y)| \leqslant M$ para $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$, onde $r > 0$ e $M > 0$ são reais fixos, então

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \overbrace{f(x, y)}^{\to 0} \cdot \overbrace{g(x, y)}^{\text{limitada}} = 0$$

3. $$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} |f(x, y)| = 0.$$

4. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) - L] = 0.$

5. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = L.$

6. Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$, então,

a) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2.$

b) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k f(x,y) = kL_1.$ (k constante)

c) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\, g(x,y) = L_1 L_2.$

d) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

7. (**Conservação do sinal.**) Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, $L > 0$, então existirá $\delta > 0$, tal que, para todo $(x, y) \in D_f$,

$$0 < \| (x,y) - (x_0, y_0) \| < \delta \Rightarrow f(x,y) > 0.$$

EXEMPLO 5. Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.

Solução

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ e $\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant 1$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x}_{0} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} = 0.$$

EXEMPLO 6. Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

Solução

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ e tomemos $\gamma_1(t) = (0, t)$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{0^2}{0^2+t^2} = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ não existe.

CUIDADO: $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ não é limitada!

Exercícios 9.1

1. Calcule, caso exista.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{y-x^3}$

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2-y^2}$

2. Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ (veja Exemplo 9 — Seç. 8.2).

a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, com $a^2 + b^2 > 0$; mostre que, quaisquer que sejam a e b,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

Tente visualizar este resultado através das curvas de nível de f.

b) Calcule $\lim_{t\to 0} f(\delta(t))$, onde $\delta(t) = (t^2, t)$.

(Antes de calcular o limite, tente prever o resultado olhando para as curvas de nível de f.)

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ existe? Por quê?

3. Sejam γ_1 e γ_2 curvas satisfazendo as condições do Exemplo 4. A afirmação:

"$\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to t_0} f(\gamma_2(t)) = L \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$"

é falsa ou verdadeira? Justifique.

4. Calcule $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - 2xh - k}{\|(h,k)\|}$, onde $f(x,y) = x^2 + y$.

5. Calcule, caso exista, $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k)}{\|(h,k)\|}$, onde f é dada por $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.

6. Suponha que $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = a$ e $\lim_{u \to a} g(u) = L$, com g não-definida em a e $Im f \subset D_g$.
Prove que

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} g(f(x, y)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Prove, ainda, que o resultado acima continua válido se supusermos g definida em a, com g contínua em a.

7. Calcule $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

8. Seja $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

Calcule $\lim_{(x, y) \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \dfrac{f(x, y)}{x^2 + y^2 - 1}$.

9.2. Continuidade

Definição. Seja f uma função de duas variáveis reais a valores reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$, com (x_0, y_0) ponto de acumulação de D_f. Definimos:

$$f \text{ contínua em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Se f for contínua em todos os pontos de um subconjunto A de D_f, diremos que *f é contínua em A*. Diremos, simplesmente, que f é *contínua* se o for em todos os pontos de seu domínio.

EXEMPLO 1. A função constante $f(x, y) = k$ é contínua, pois,

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = k = f(x_0, y_0)$$

para todo (x_0, y_0) em $\mathbb{R}^2$. (veja Exemplo 1 — Seç. 9.1.)

EXEMPLO 2. A função $f(x, y) = x$ é contínua, pois,

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} x = x_0 = f(x_0, y_0)$$

para todo (x_0, y_0) em $\mathbb{R}^2$. (Veja Exemplo 2 — Seç. 9.1.)

EXEMPLO 3. A função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$?
Justifique.

Solução

Tomando-se $\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$ vem,

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

e

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Logo, $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ não existe, e, portanto, f não é contínua em $(0, 0)$.

O próximo teorema nos diz que se $g(u)$ e $f(x, y)$ forem contínuas e se $Im f \subset D_g$, então a função composta $h(x, y) = g(f(x, y))$ também o será.

Teorema 1. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g: B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $Im f \subset D_g$. Se f for contínua em (x_0, y_0) e g contínua em $f(x_0, y_0)$, então a composta $h(x, y) = g(f(x, y))$ será contínua em (x_0, y_0).

Demonstração

Como $g(u)$ é contínua em $f(x_0, y_0)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

① $|u - f(x_0, y_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(u) - g(f(x_0, y_0))| < \epsilon.$

Sendo f contínua em (x_0, y_0), para o $\delta_1 > 0$ acima, existe $\delta > 0$ tal que

② $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \delta_1.$

De ① e ② resulta,

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta \Rightarrow |g(f(x, y)) - g(f(x_0, y_0))| < \epsilon;$$

logo, $h(x, y) = g(f(x, y))$ é contínua em (x_0, y_0). ■

Como conseqüência deste teorema, segue que se $g(x)$ for contínua, então a função h dada por $h(x, y) = g(x)$ também será contínua. De fato, sendo $f(x, y) = x$, teremos $h(x, y) = g(f(x, y))$, com g e f contínuas.

EXEMPLO 4. $h(x, y) = x^2$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, pois $g(x) = x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 5. Sendo $f(x, y)$ contínua, as compostas $\operatorname{sen} f(x, y)$, $\cos f(x, y)$, $[f(x, y)]^2$ etc. também serão.

Teorema 2. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva tais que $\gamma(t) \in A$ para todo $t \in I$. Se γ for contínua em $t_0 \in I$ e f contínua em $\gamma(t_0)$, então a composta $g(t) = f(\gamma(t))$ será contínua em t_0.

Demonstração

Fica a cargo do leitor.

Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ contínuas em (x_0, y_0) e seja k uma constante. Segue das propriedades dos limites que $f + g$, kf e $f \cdot g$ são, também, contínuas em (x_0, y_0). Além disso, se $g(x_0, y_0) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ será, também, contínua em (x_0, y_0).

EXEMPLO 4. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

Solução

Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ podemos aplicar a propriedade relativa a quociente de funções contínuas, pois, x^3 e $x^2 + y^2$ são contínuas e $x^2 + y^2$ não se anula nestes pontos. Para estudar f com relação à continuidade no ponto $(0, 0)$ precisamos primeiro ver o que acontece com o limite de f neste ponto.

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

$\left(\text{Observe que } \lim_{(x, y) \to (0, 0)} x = 0 \text{ e } \left| \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1 \text{ para todo } (x, y) \neq (0, 0).\right)$ Assim

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Conclusão: f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Sejam agora, $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g, h : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ três funções tais que $(g(x, y), h(x, y)) \in A$, para todo $(x, y) \in B$. Sem nenhuma dificuldade, demonstra-se que se g e h forem contínuas em (x_0, y_0) e f contínua em $(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))$, então a composta $f(g(x, y), h(x, y))$ será, também, contínua em (x_0, y_0). Este resultado, bem como os teoremas 1 e 2, são casos particulares de um teorema mais geral sobre continuidade de funções compostas, que não enunciaremos aqui.

Exercícios 9.2

1. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

a) $f(x, y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

b) $f(x, y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$

c) $f(x, y) = \ln \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - 3y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

g) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right)} & \text{se } r < 1 \text{ onde } r = \|(x, y)\| \\ 0 & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$

2. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$? Justifique.

3. Prove que se f for contínua em (x_0, y_0) e se $f(x_0, y_0) > 0$, então existirá $r > 0$ tal que $f(x, y) > 0$ para $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$.

4. Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que goza da propriedade: quaisquer que sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) em A, existe uma curva contínua $\gamma : [a, b] \to A$ tal que $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x_1, y_1)$. Prove que se f for contínua em A e se $f(x_0, y_0) < m < f(x_1, y_1)$, então existirá $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) = m$.

(*Sugestão*. Aplique o teorema do valor intermediário à função contínua $g(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$.)

5. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, uma função contínua e seja c um número real dado. Prove que o conjunto $\{(x, y) \in A \mid f(x, y) < c\}$ é aberto.

6. Dizemos que a seqüência de pontos $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ *converge* a $(\bar{x}, \bar{y})$ se, dado $\epsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \epsilon.$$

Suponha que $f(x, y)$ seja contínua em $(\bar{x}, \bar{y})$, que $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ convirja para $(\bar{x}, \bar{y})$ e que $(x_n, y_n) \in D_f$ para todo $n \geq 0$. Prove que a seqüência dada por $a_n = f(x_n, y_n)$ converge para $f(\bar{x}, \bar{y})$.

7. Suponha f contínua no retângulo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, \bar{\alpha} \leq y \leq \bar{\beta}\}$. Prove que f é limitada neste retângulo. (f *limitada* em A significa que existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$ em A.)

(*Sugestão*. Suponha, por absurdo, que f não seja limitada em A. Então, existirá (x_1, y_1) em A tal que $|f(x_1, y_1)| > 1$. Tomando-se o ponto médio de cada lado, divida o retângulo A em 4 retângulos iguais; em um deles, batizado A_2, f não será limitada, logo existirá $(x_2, y_2) \in A_2$ tal que $|f(x_2, y_2)| > 2$ etc.)

8. (**Teorema de Weierstrass**). Seja f como no Exercício 7. Prove que f assume em A valor máximo e valor mínimo.

(*Sugestão*. Veja Apêndice A2.4 — Volume 1.)

10

DERIVADAS PARCIAIS

10.1. DERIVADAS PARCIAIS

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0, podemos considerar a função g de uma variável dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se *derivada parcial de f em relação a x, no ponto* (x_0, y_0) e indica-se com uma das notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. De acordo com a definição de derivada temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}$$

ou, ainda,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}}$$

Seja A o subconjunto de D_f formado por todos os pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe; fica assim definida uma nova função, indicada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e definida em A, que a cada $(x, y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Tal função denomina-se *função derivada parcial de 1.ª ordem de f, em relação a x*, ou, simplesmente, *derivada parcial de f em relação a x*.

De modo análogo, define-se *derivada parcial de f, em relação a y, no ponto* (x_0, y_0) que se indica por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}}$$

Para se calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ fixa-se $y = y_0$ em $z = f(x, y)$ e calcula-se a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. Da mesma forma, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é a derivada, em relação a x, de $f(x, y)$, mantendo-se y *constante*. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é a derivada, em relação a y, de $f(x, y)$, mantendo-se x constante.

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 2xy - 4y$. Calcule:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *b)* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ *d)* $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$

Solução

a) Devemos olhar y como constante e derivar em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 4y) = 2y$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x}(-4y) = 0.$$

Por limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)y - 4y - 2xy + 4y}{\Delta x}$$
$$= 2y.$$

b) Devemos olhar x como constante e derivar em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 4y) = 2x - 4.$$

c) Conforme *a*, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$. Daí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$.

d) Conforme *b*, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 4$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -6.$$

EXEMPLO 2. Considere a função $z = f(x, y)$ dada por $z = \text{arc tg}\,(x^2 + y^2)$. Calcule:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

c) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$

d) $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$

Solução

a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\text{arc tg}\,(x^2 + y^2)) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{1 + (x^2 + y^2)^2},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\text{arc tg}\;(x^2 + y^2)\right) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2),$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

c) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{2}{1 + 4} = \frac{2}{5}.$

d) $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.$

Antes de passarmos ao próximo exemplo, observamos que uma função $z = f(x, y)$ se diz *definida ou dada implicitamente* pela equação $g(x, y, z) = 0$ se, para todo $(x, y) \in D_f$, $g(x, y, f(x, y)) = 0$. Por exemplo, a função $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 < 1$, é dada implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pois, para todo (x, y) no seu domínio, $x^2 + y^2 + (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2 = 1$. As funções $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, e $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, são também, dadas implicitamente pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (verifique).

EXEMPLO 3. Sendo $z = f(x, y)$ dada implicitamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$, calcule:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solução

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 < 1$. Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \; x^2 + y^2 < 1.$$

Poderíamos, também, ter chegado ao resultado acima trabalhando diretamente com a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial x}(1);$$

como $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$, $\frac{\partial}{\partial x}[z^2] = \frac{d}{dz}[z^2] \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2z\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$, resulta:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ x^2+y^2<1.$$

b) $\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2) = \frac{\partial}{\partial y}(1)$, ou seja,

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

e, portanto, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ x^2+y^2<1.$

CUIDADOS COM NOTAÇÕES. A notação $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, como vimos, indica a derivada de $f(x, y)$ em relação a x, onde y é olhado como *constante*, ou seja, como *independente de x*. Por outro lado, a notação $\frac{d}{dx}[f(x, y)]$ indica a derivada de $f(x, y)$, onde y *deve ser olhado* (quando nada for dito em contrário) *como função de x*. As notações foram criadas para serem usadas corretamente. Portanto, não confunda $\frac{\partial}{\partial x}$ com $\frac{d}{dx}$.

EXEMPLO 4. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x$, enquanto

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = 2x + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

pois,

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}.$$

EXEMPLO 5. Suponha que $z = f(x, y)$ seja dada implicitamente pela equação

$$e^{xyz} = x^2+y^2+z^2.$$

Suponha que f admita derivada parcial em relação a x, expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x, y e z.

Solução

Para todo $(x, y) \in D_f$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2).$$

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) = e^{xyz}\frac{\partial}{\partial x}(xyz) = e^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Assim,

$$e^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - yz\,e^{xyz}}{xy\,e^{xyz} - 2z}$$

em todo $(x, y) \in D_f$ com $xy\,e^{xyz} - 2z \neq 0$.

EXEMPLO 6. Seja $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável e derivável. Considere a função g dada por $g(x, y) = \phi(x^2+y^2)$. Verifique que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1).$$

Solução

$$g(x, y) = \phi(u) \text{ onde } u = x^2+y^2.$$

Então, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(x^2+y^2)\,2x.$$

Da mesma forma, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(x^2+y^2)\,2y.$$

Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2\,\phi'(2) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1).$$

Observação. Se no exemplo anterior a função ϕ fosse, por exemplo, a função seno, teríamos $g(x, y) = \text{sen}(x^2+y^2)$ e, assim, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \text{sen}'(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x\cos(x^2+y^2)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \text{sen}'(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y\cos(x^2+y^2)$.

EXEMPLO 7. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Determine

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Solução

a) Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ podemos aplicar a regra do quociente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)\,2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em (0, 0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ é a derivada, em } x = 0, \text{ de } g(x) = f(x, 0).$$

$$f(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

assim, $g(x) = f(x, 0) = x$, para todo x; segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g'(0) = 1.$$

Poderíamos, também, ter calculado $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ por limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é a função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) Para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em (0, 0)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ é (caso exista) a derivada, em } y = 0, \text{ de } h(y) = f(0, y);$$

$$f(0, y) = \begin{cases} -1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

assim, $h(y)$ não é contínua em $y = 0$, logo, $h'(0)$ não existe, ou seja, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ não existe.

Segue que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ está definida em todo $(x, y) \neq (0, 0)$ (mas não em (0, 0)) e é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

EXEMPLO 8. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Prove que f não depende de x, isto é, que existe $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \phi(y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução

Fixado um y qualquer, a função $h(x) = f(x, y)$ é constante em $\mathbb{R}$, pois, para todo x, $h'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$. Segue que, para todo x,

$$h(x) = h(0)$$

ou seja,

$$f(x, y) = f(0, y).$$

Como y foi fixado de modo arbitrário, resulta que $f(x, y) = f(0, y)$ se verifica para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Tomando-se $\phi(y) = f(0, y)$ teremos

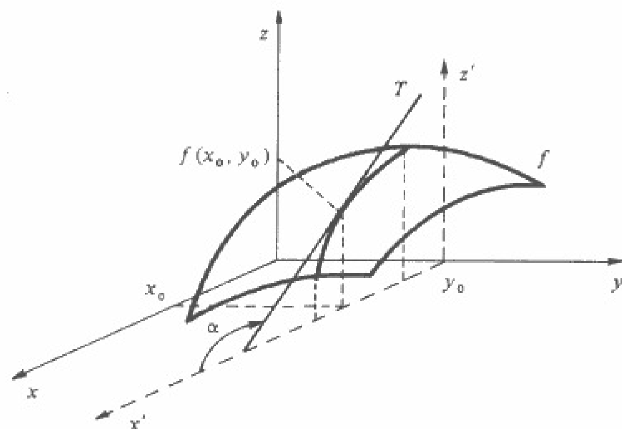
$$f(x, y) = \phi(y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 9 (*Interpretação geométrica*). Suponhamos que $z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in D_f$. O gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$, no plano $x'\,y_0\,z'$ (veja figura), é a intersecção do plano $y = y_0$ com o gráfico de f; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é, então, o *coeficiente angular da reta tangente* T a esta intersecção no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha. \text{ Interprete você } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

O exemplo seguinte mostra-nos que a *existência de derivada parcial num ponto não implica a continuidade da função neste ponto.*



EXEMPLO 10. Mostre que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admite derivadas parciais em (0, 0), mas não é contínua neste ponto.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Assim, f admite derivadas parciais em (0, 0). Vamos mostrar, a seguir, que f não é contínua em (0, 0). A composta de f com a reta γ dada por $\gamma(t) = (t, t)$ é

$$g(t) = f(t, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Como γ é contínua em $t = 0$ e a composta $g(t) = f(t, t)$ não é contínua em $t = 0$, resulta que f não é contínua em (0, 0). (Por quê?)

O exemplo anterior mostra-nos ainda que a mera existência das derivadas parciais de f num ponto (x_0, y_0) não implica a derivabilidade em t_0 da composta $g(t) = f(\gamma(t))$, onde γ é uma curva suposta diferenciável em t_0 e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. No exemplo anterior, f admite derivadas parciais em (0, 0), $\gamma(t) = (t, t)$ é diferenciável em $t = 0$, mas a composta $g(t) = f(\gamma(t))$ *não* é diferenciável em $t = 0$.

Do que vimos acima, resulta que a existência de derivadas parciais num ponto (x_0, y_0) não é uma boa generalização do conceito de diferenciabilidade dado para funções de uma variável real. Uma boa generalização deverá implicar a continuidade da função e a diferenciabilidade da composta $g(t) = f(\gamma(t))$ quando f e γ o forem, porque é isso que acontece no caso de funções de uma variável. Veremos no próximo capítulo qual é a boa generalização do conceito de diferenciabilidade para funções de várias variáveis reais.

Exercícios 10.1

1. Determine as derivadas parciais

a) $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

b) $z = \cos xy$

c) $z = \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

e) $z = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

f) $z = xy\, e^{xy}$

g) $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

h) $z = \text{arc tg } \dfrac{x}{y}$

i) $g(x, y) = x^y$

j) $z = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

l) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

m) $z = \dfrac{x \text{ sen } y}{\cos(x^2 + y^2)}$

2. Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

3. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Calcule

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$

4. Seja $g(x, y) = \phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ a função do exercício anterior. Verifique que

$$x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $y \neq 0$.

5. Considere a função dada por $z = x \text{ sen } \dfrac{x}{y}$. Verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. A função $p = p(V, T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$, onde n e R são constantes não-nulas. Calcule $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T}$.

7. Seja $z = e^y \phi(x - y)$, onde ϕ é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

8. Seja $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de uma variável real e seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, \phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Mostre que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

9. Sejam $z = e^{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \theta$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = e^{x^2 + y^2} (2x \cos \theta + 2y \operatorname{sen} \theta).$$

Conclua que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen} \theta.$$

10. Suponha que a função $z = z(x, y)$ admita derivadas parciais em todos os pontos de seu domínio e que seja dada implicitamente pela equação $xyz + z^3 = x$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y, z.

11. Seja $z = f(x + at)$ onde f é uma função diferenciável de uma variável real e a uma constante. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a \frac{\partial z}{\partial x}.$$

12. Seja $z = f(x^2 - y^2)$, onde $f(u)$ é uma função diferenciável de uma variável real. Verifique que

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

13. Considere a função dada por $w = xy + z^4$, onde $z = z(x, y)$. Admita que $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 4$ e que $z = 1$ para $x = 1$ e $y = 1$. Calcule $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

14. Seja $f(x, y) = e^{-\frac{x}{2}} \phi(2y - x)$, onde ϕ é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -f.$$

15. Seja $f(x, y) = \int_0^{x^2 + y^2} e^{-t^2}\, dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

16. Seja $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2}\, dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

17. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $g(x, y) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$. Verifique que

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = yf'(y).$$

18. Seja $f(x, y) = x^3y^2 - 6xy + \phi(y)$. Determine uma função ϕ de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}.$$

19. Determine uma função $f(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1} \end{cases}$$

20. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sendo $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

21. Seja $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de f.

b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

22. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x, 0) = 1 + x^2$, $f(0, y) = 1 + y^2$ e $f(x, y) = 0$ se $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

a) Esboce o gráfico de f.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

c) f é contínua em $(0, 0)$? Justifique.

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ existe? $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$?

e) Qual o domínio de $\frac{\partial f}{\partial x}$?

23. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (t, t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f.

a) Determine $z(t)$.
b) Esboce os gráficos de f e γ.
c) Determine a reta tangente a γ no ponto $(1, 1, 2)$.
d) Seja T a reta do item *c*; mostre que T está contida no plano de equação

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

24. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida no gráfico de f. Suponha, ainda, $\gamma(0) = (1, 1, 2)$. Seja T a reta tangente a γ em $\gamma(0)$. Mostre que T está contida no plano

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

Interprete geometricamente.

25. Suponha que $z = f(x, y)$ admita derivadas parciais em (x_0, y_0). Considere as curvas cujas imagens estão contidas no gráfico de f:

$$\gamma_1: \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = f(x_0, t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(t, y_0) \end{cases}$$

Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes a γ_1 e γ_2, nos pontos $\gamma_1(y_0)$ e $\gamma_2(x_0)$, respectivamente. Mostre que a equação do plano determinado pelas retas T_1 e T_2 é

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

26. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ e seja $\gamma(t) = (t, t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está no gráfico de f. Seja T a reta tangente a γ no ponto $\gamma(0)$. Mostre que T não está contida no plano da equação

$$z - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0).$$

27. Considere a função $z = f(x, y)$ e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Como você definiria *plano tangente* ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0)? Admitindo que f admita derivadas parciais em (x_0, y_0), escreva a equação de um plano que você acha que seja um "forte" candidato a plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

28. Dê exemplo de uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ seja contínua em $\mathbb{R}^2$, mas que f não seja contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$.

29. Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto crítico* ou *estacionário* de $z = f(x, y)$ se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Determine (caso existam) os pontos críticos da função dada.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *b)* $f(x, y) = 2x + y^3$

c) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - y$ *d)* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

e) $f(x, y) = 3x^2 + 8xy^2 - 14x - 16y$ *f)* $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$

30. Seja (x_0, y_0) um ponto de D_f. Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto de máximo local* de f (respectivamente, *ponto de mínimo local*) se existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) tal que, para todo $(x, y) \in B \cap D_f$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (respectivamente, $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$). Prove que se (x_0, y_0) é um *ponto interior* de D_f e se f admite derivadas parciais em (x_0, y_0), então uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local ou de mínimo local é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f, isto é, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

31. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.

32. Dê exemplo de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in A$, mas que f não seja constante em A.

33. Suponha que, quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) em $\mathbb{R}^2$, $|f(x, y) - f(s, t)| \leq \|(x, y) - (s, t)\|^2$. Prove que f é constante.

34. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe para todo $(x, y) \in A$. Sejam (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0)$ dois pontos de A. Prove que se o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0)$ estiver contido em A, então existirá $\bar{x}$ entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0)\, h.$$

35. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que f admite derivadas parciais em A. Seja $(x_0, y_0) \in A$. Prove que se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em (x_0, y_0), então f também será.

(*Sugestão*. $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x, y) - f(x_0, y)}_{(I)} + \underbrace{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}_{(II)}$; aplique o TVM a (I) e (II).)

10.2. Derivadas Parciais de Funções de Três ou Mais Variáveis Reais

Sejam $w = (f(x, y, z)$ e $(x_0, y_0, z_0) \in D_f$. Mantendo-se y_0 e z_0 constantes, podemos considerar para função $g(x) = f(x, y_0, z_0)$. A derivada desta função, em $x = x_0$ (caso exista), denomina-se *derivada parcial de f em relação a x no ponto* (x_0, y_0, z_0) e indica-se por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}}$.

De modo análogo, define-se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$. Tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.$$

Da mesma forma, definem-se as derivadas parciais de uma função de mais de três variáveis reais.

EXEMPLO. Calcule as derivadas parciais da função $s = f(x, y, z, w)$ dada por

$$s = e^{xyzw}$$

Solução

$$\frac{\partial s}{\partial x} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial x}(xyzw) = yzwe^{xyzw} \qquad (y, z \text{ e } w \text{ são olhadas como constantes}).$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial y}(xyzw) = xzwe^{xyzw}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial z}(xyzw) = xywe^{xyzw}$$

$$\frac{\partial s}{\partial w} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial w}(xyzw) = xyze^{xyzw}$$

Exercícios 10.2

1. Calcule as derivadas parciais.

   a) $f(x, y, z) = x\,e^{x - y - z}$ *b)* $w = x^2 \text{ arc sen } \frac{y}{2}$

   c) $w = \frac{xyz}{x + y + z}$ *d)* $f(x, y, z) = \text{sen}\,(x^2 + y^2 + z^2)$

   e) $s = f(x, y, z, w)$ dada por $s = xw \ln (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$

2. Seja $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$. Verifique que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = -f.$$

3. Seja $s = f(x, y, z, w)$ dada por $s = e^{\frac{x}{y} - \frac{z}{w}}$. Verifique que

$$x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} + z\frac{\partial s}{\partial z} + w\frac{\partial s}{\partial w} = 0.$$

4. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com $f(3) = 4$. Seja

$$g(x, y, z) = \int_0^{x + y^2 + z^4} f(t)\, dt.$$

   Calcule:

   a) $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$ *b)* $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$ *c)* $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e seja g dada por $g(x, y, z) = f(r)$ onde $r = \|(x, y, z)\|$. Verifique que

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = rf'(r)$$

6. Seja $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\phi'(3) = 4$. Seja $g(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$. Calcule:

   a) $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$ *b)* $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$ *c)* $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

11

Funções Diferenciáveis

11.1. Função Diferenciável: Definição

O objetivo desta seção é estender para funções de duas variáveis reais o conceito de diferenciabilidade dado para funções de uma variável real.

Vimos que, por definição, uma função $f(x)$ é *diferenciável* ou *derivável* em x_0 se e somente se o limite, quando h tende a zero, da razão incremental $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existir e for finito. Esta forma não é adequada para generalização, pois se f for uma função de duas variáveis reais h será um par ordenado e, então, a razão incremental não terá sentido. Nossa tarefa a seguir é a de tentar obter uma forma equivalente à definição de diferenciabilidade e que seja passível de generalização.

Supondo $f(x)$ diferenciável em x_0, existe um real a, $a = f'(x_0)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a.$$

Temos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = 0.$$

Como

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{G(h)}{|h|} = 0 \text{ (verifique)}$$

resulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{|h|} = 0.$$

Portanto, f é *diferenciável* em x_0 se e somente se existir um real a tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{|h|} = 0.$$

Estamos, agora, em condições de definir diferenciabilidades para funções de duas variáveis reais.

Definição. Sejam $f: A \to \mathbb{R}$, A aberto de $\mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é *diferenciável* em (x_0, y_0) se e somente se existirem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)-ah-bk}{\|(h,k)\|} = 0$$

O próximo teorema nos diz que *diferenciabilidade* implica *continuidade*.

Teorema 1. Se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f será contínua em (x_0, y_0).

Demonstração

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), existem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

onde $E(h, k)$ é a função dada por

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + E(h,k).$$

Como

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} (ah + bk) = 0$$

e,

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} E(h,k) = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \|(h,k)\| \cdot \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

resulta

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0).$$

Logo, f é contínua em (x_0, y_0). ■

Vamos mostrar, agora, que se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f admitirá derivadas parciais em (x_0, y_0) e

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k$$

será a *única* transformação linear que goza da propriedade

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k}{\|(h, k)\|} = 0$$

Teorema 2. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e seja $(x_0, y_0) \in A$. Se f for diferenciável em (x_0, y_0), então f admitirá derivadas parciais neste ponto.

Demonstração

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), existem reais a e b tais que

① $$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

onde $E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk$. Segue de ① que

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{E(h, 0)}{\|(h, 0)\|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Daí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De modo análogo, obtém-se $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. ■

Observação. Provamos acima que se

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0$$

então teremos necessariamente $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Deste modo, se $f(x, y)$ for diferenciável em (x_0, y_0), então $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ serão os *únicos* reais para os quais o limite acima é zero.

Segue do teorema 2 o seguinte *importante*

Corolário. Seja $f(x, y)$ definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$. Tem-se:

$$f \text{ diferenciável em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a) \ f \text{ admite derivadas parciais em } (x_0, y_0); \\ b) \ \lim\limits_{(h, k) \to (0, 0)} \dfrac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \end{cases}$$

$$\left(E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k \right)$$

Observações

1. Segue do corolário acima que para provar que uma função f é diferenciável em (x_0, y_0) é suficiente provar que f admite derivadas parciais em (x_0, y_0) e que

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k}{\|(h, k)\|} = 0$$

2. Se uma das derivadas parciais não existir em (x_0, y_0), então f não será diferenciável neste ponto.

3. Se ambas as derivadas parciais existirem em (x_0, y_0), mas se o limite acima não for zero, então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

4. Se f não for contínua em (x_0, y_0), então f não será diferenciável em (x_0, y_0).

Dizemos que f é *diferenciável* em $B \subset D_f$ se f for diferenciável em todo $(x, y) \in B$. Diremos, simplesmente, que f é uma *função diferenciável* se f for diferenciável em todo ponto de seu domínio.

EXEMPLO 1. Prove que $f(x, y) = x^2 y$ é uma função diferenciável.

Solução

Precisamos provar que f é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ($D_f = \mathbb{R}^2$). f admite derivadas parciais em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

Por outro lado, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$,

$$E(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k =$$
$$= (x + h)^2 (y + k) - x^2 y - 2xyh - x^2 k =$$
$$= 2xhk + h^2 y + h^2 k.$$

Como, para $(h, k) \neq (0, 0)$, $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$, resulta

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{2xhk + h^2 y + h^2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h, k) \to (0, 0)} \left[2x\overset{\nearrow 0}{h} \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\text{limitada}} + hy \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} + hk \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right] = 0.$$

Portanto, f é diferenciável em todo (x, y) de $\mathbb{R}^2$, ou seja, f é uma função diferenciável.

EXEMPLO 2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

Solução

f não é contínua em $(0, 0)$; logo, *f não é diferenciável* em $(0, 0)$. Para a não-continuidade de f em $(0, 0)$, veja Exercício 2, Seç. 9.1. Observe que f admite derivadas parciais em $(0, 0)$.

EXEMPLO 3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

Temos

$$E(h, k) = f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k$$

ou seja, $E(h, k) = \dfrac{h^3}{h^2 + k^2} - h$. Segue que

$$\frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \frac{\dfrac{-hk^2}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{-hk^2}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} = G(h, k).$$

Como $\lim\limits_{t \to 0} G(t, t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-t}{2\sqrt{2}\,|t|}$ não existe, resulta que

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} \text{ não existe;}$$

logo, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Observação. Como

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \overset{\nearrow 0}{x} \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} = 0 = f(0, 0)$$

resulta que f é contínua em $(0, 0)$. Assim, f é contínua em $(0, 0)$, admite derivadas parciais em $(0, 0)$, mas não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercícios 11.1

1. Prove que as funções dadas são diferenciáveis.

   a) $f(x, y) = xy$
   b) $f(x, y) = x + y$
   c) $f(x, y) = x^2 y^2$
   d) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$
   e) $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$
   f) $f(x, y) = x^2 + y^2$

2. f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

   a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.
   b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.
   c) $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

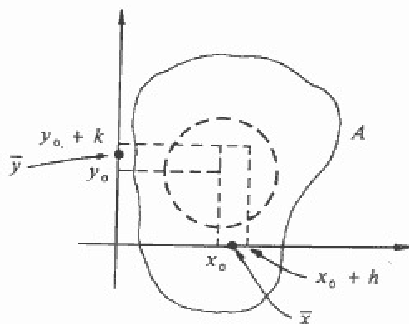
11.2. Uma Condição Suficiente para Diferenciabilidade

Nosso objetivo, nesta seção, é demonstrar que a *continuidade em A, A aberto, das derivadas parciais de uma função f garante a diferenciabilidade desta função em todos os pontos de A*. Este resultado é bastante importante, pois, em muitas ocasiões, é mais fácil verificar a continuidade das derivadas parciais do que a diferenciabilidade diretamente pela definição.

> ***Teorema.*** Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existirem em A e forem contínuas no ponto (x_0, y_0), então f será diferenciável neste ponto.

Demonstração

Como A é aberto, existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), contida em A. Sejam h e k tais que $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$. Temos



$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}_{\text{(I)}} +$$

$$\underbrace{+ f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0).}_{\text{(II)}}$$

Fazendo $G(x) = f(x, y_0 + k)$, pelo TVM existe $\bar{x}$, entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$\text{(I)} = G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(\bar{x})\, h = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)\, h.$$

Do mesmo modo, existe $\bar{y}$ entre y_0 e $y_0 + k$ tal que

$$\text{(II)} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})\, k.$$

Assim,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})\, k.$$

Subtraindo a ambos os membros da igualdade acima $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k$ obtemos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] k.$$

Segue que

$$\left| \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k}{\|(h, k)\|} \right| \le$$

$$\le \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right|}_{\text{(III)}} \overbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}}^{\text{limitada}} +$$

$$+ \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right|}_{\text{(IV)}} \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Pela continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em (x_0, y_0), as expressões (III) e (IV) tendem a zero, quando $(h, k) \to (0, 0)$, e, portanto,

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k}{\|(h, k)\|} = 0;$$

logo, f é diferenciável em (x_0, y_0). ■

Seja $f(x, y)$ uma função. Dizemos que f é de *classe* C^1 no aberto A se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em A.

Segue do teorema anterior o seguinte

> ***Corolário.*** Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^1 em A, então f será diferenciável em A.

EXEMPLO 1. $f(x, y) = \text{sen}\,(x^2 + y^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos\,(x^2 + y^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos\,(x^2 + y^2)$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Observação. O teorema anterior conta-nos que se f admite derivadas parciais em A e se estas são *contínuas* no ponto (x_0, y_0), então f será diferenciável em (x_0, y_0). A recíproca, entretanto, não é verdadeira: existem funções que são diferenciáveis num ponto sem que as derivadas parciais sejam contínuas neste ponto. O exemplo seguinte exibe-nos uma tal função.

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *não* são contínuas em $(0, 0)$.

c) Prove que f é diferenciável em $(0, 0)$.

d) Prove que f é uma função diferenciável.

Solução

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2\ \text{sen}\,\dfrac{1}{x^2}}{x}$, ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \overset{0}{x}\ \underbrace{\text{sen}\,\frac{1}{x^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

De modo análogo, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \cos \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2y\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \cos \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, t)$ não existe. (Verifique.) Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0, 0)$.

De modo análogo, verifica-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0, 0)$.

c)
$$\frac{f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\|(h, k)\|} = \frac{(h^2 + k^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$
$$= \sqrt{h^2 + k^2}\ \text{sen}\,\frac{1}{h^2 + k^2}.$$

Como $\lim\limits_{(h, k) \to (0, 0)} \overset{0}{\sqrt{h^2 + k^2}}\ \underbrace{\text{sen}\,\dfrac{1}{h^2 + k^2}}_{\text{limitada}} = 0$, resulta que f é diferenciável em $(0, 0)$.

d) f é diferenciável em todo $(x, y) \neq (0, 0)$, pois, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

Conclusão. f é uma função diferenciável em todo $(x, y) \in D_f$ $(D_f = \mathbb{R}^2)$.

EXEMPLO 3. Verifique que $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é uma função diferenciável.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todo $(x, y) \neq (0, 0)$, pois são quocientes de contínuas.

Em (0, 0),

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[2\overset{0}{\not{x}} \underbrace{\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}}_{\text{limitada}} + 4x \overbrace{\frac{x^2 \cdot y^2}{(x^2+y^2)^2}}^{\text{limitada}} \right] = 0$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0);$$

logo, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (0, 0). De modo análogo, prova-se que $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em (0, 0).

Da continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, segue que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Observação. Para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$0 \leqslant x^2 \leqslant x^2 + y^2 \Rightarrow x^4 \leqslant (x^2+y^2)^2 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 1;$$

e

$$\begin{cases} 0 \leqslant x^2 \leqslant x^2 + y^2 \\ \qquad\qquad \Rightarrow x^2y^2 \leqslant (x^2+y^2)^2 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 1. \\ 0 \leqslant y^2 \leqslant x^2 + y^2 \end{cases}$$

Exercícios 11.2

1. Verifique que a função dada é diferenciável.

a) $f(x, y) = e^{x-y^2}$ *b)* $f(x, y) = x^4 + y^3$

c) $f(x, y) = x^2y$ *d)* $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

e) $f(x, y) = x\cos(x^2 + y^2)$ *f)* $f(x, y) = \text{arc tg } xy$

2. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases}$

11.3. Plano Tangente e Reta Normal

Sendo $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), temos:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Fazendo $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Seja $E(x, y)$ o erro que se comete na aproximação de $f(x, y)$ por

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Assim,

$$f(x, y) = T(x, y) + E(x, y)$$

onde

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Do que vimos na Seç. 11.1 (veja, também, o Exercício 15 desta seção), resulta que $T(x, y)$ é a *única* função afim que aproxima $f(x, y)$ com erro $E(x, y)$ que *tende a zero mais rapidamente* que $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$, quando (x, y) tende a (x_0, y_0). (Dizer que $E(x, y)$ *tende a zero mais rapidamente* que $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$, quando (x, y) tende a (x_0, y_0), significa que

$$\left.\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.\right)$$

Definição. Seja f diferenciável no ponto (x_0, y_0). O plano

① $$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

denomina-se *plano tangente* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observe que só definimos plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se f for diferenciável em (x_0, y_0). Se f não for diferenciável em (x_0, y_0), mas admitir derivadas parciais neste ponto, então o plano ① existirá, mas *não será plano tangente*. Veremos mais adiante que se $f(x, y)$ for *diferenciável* em (x_0, y_0), o plano ① conterá todas as retas tangentes ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Em notação de produto escalar, o plano ① se escreve:

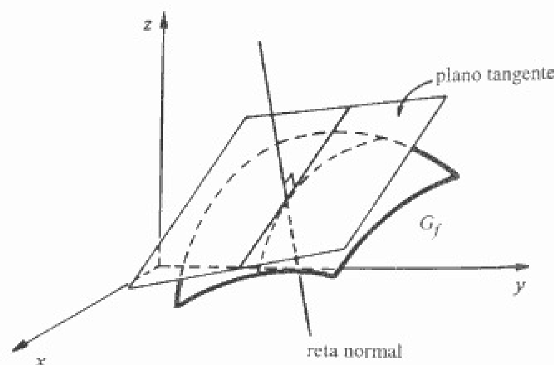
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] = 0.$$

Segue que o plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor

② $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

A reta que passa pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é paralela ao vetor ② denomina-se *reta normal* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. A equação de tal reta é:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$



EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 3x^2y - x$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal do ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Solução

Plano tangente

$$z - f(1, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

$$\begin{cases} f(1, 2) = 5 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 1 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 11 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3. \end{cases}$$

A equação do plano tangente é

$$\boxed{z - 5 = 11(x - 1) + 3(y - 2)}$$

Reta normal

$$(x, y, z) = (1, 2, f(1, 2)) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2), -1\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

ou seja,

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 2, 5) + \lambda(11, 3, -1), \lambda \in \mathbb{R}.}$$

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Mostre que o gráfico de f não admite plano tangente em $(0, 0, f(0, 0))$.

Solução

De acordo com a definição, para que f admita plano tangente no ponto $(0, 0, f(0, 0))$, f deve ser diferenciável em $(0, 0)$. Se provarmos que f é não diferenciável em $(0, 0)$, seguirá que f não admite plano tangente no ponto dado. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0. \text{ (Verifique.)}$$

$$\frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\,h\,\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\,k}{\|(h, k)\|} = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Seja $G(h, k) = \dfrac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$. Temos:

$$\lim_{t \to 0} G(0, t) = 0$$

e

$$\lim_{t \to 0^+} G(t, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\,h - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)k}{\|(h, k)\|}$$

não existe, logo, f não é diferenciável em $(0, 0)$; portanto, *f não admite plano tangente* no ponto $(0, 0, f(0, 0))$. Observe que o plano

$$z - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)$$

ou seja,

$$z = 0$$

não contém a reta tangente à curva $\gamma(t) = (t, t, f(t, t))$ no ponto $\gamma(0) = (0, 0, f(0, 0))$. De fato, a reta tangente a γ no ponto $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$ é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda\left(1, 1, \frac{1}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

que, evidentemente, não está contida no plano $z = 0$.

Exercícios 11.3

1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

   a) $f(x, y) = 2x^2y$ em $(1, 1, f(1, 1))$.

   b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $(0, 1, f(0, 1))$.

   c) $f(x, y) = 3x^2y - xy$ em $(1, -1, f(1, -1))$.

   d) $f(x, y) = xe^{x^2-y^2}$ em $(2, 2, f(2, 2))$.

   e) $f(x, y) = \text{arc tg}\,(x - 2y)$ em $\left(2, \frac{1}{2}, f\left(2, \frac{1}{2}\right)\right)$

   f) $f(x, y) = xy$ em $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.

2. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

3. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

4. $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 3)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

5. $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$.

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

   b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1, 1, 1)$.

6. Considere a função $f(x, y) = x\,\phi\left(\frac{x}{y}\right)$ onde $\phi(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

7. Considere a função $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

8. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

9. Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

10. β é um plano tangente aos gráficos de $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2 - y^2$. Mostre que $a^2 + b^2 = 1$, sendo $(a, b, f(a, b))$ o ponto em que β tangencia o gráfico de f.

11. Considere a função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Seja α o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, 1 - a^2 - b^2)$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a^2 + b^2 < 1$. Seja V o volume do tetraedro determinado por α e pelos planos coordenados.

    a) Expresse V em função de a e b.

    b) Determine a e b para que se tenha $\frac{\partial V}{\partial a}(a, b) = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial b}(a, b) = 0$.

12. Determine os planos tangentes ao gráfico de $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e que contenham o eixo $0x$.

13. Considere a função $f(x, y) = xg(x^2 - y^2)$, onde $g(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, a, f(a, a))$ passa pela origem.

14. A função $z = z(x, y)$ é diferenciável e dada implicitamente pela equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

    Mostre que $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$ é a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0), $z_0 \neq 0$.

15. Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0). Seja S a função afim dada por $S(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$. Suponha que

$$f(x, y) = S(x, y) + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Conclua que $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $c = f(x_0, y_0)$.

11.4. Diferencial

Seja $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0) e consideremos a transformação linear (transformação é sinônimo de função) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

① $$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

Segue, do que vimos anteriormente, que $L(h, k)$ é a *única* transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ que aproxima o acréscimo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

com erro $E(h, k)$ que tende a zero mais rapidamente que $\|(h, k)\|$, quando (h, k) tende a $(0, 0)$. Isto é,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}_{L(h,\, k)} + E(h, k)$$

Com

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Pois bem, a transformação linear L, dada por ①, denomina-se *diferencial* de f em (x_0, y_0).

Seja $T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. Sabemos que o gráfico de T é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Fazendo $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, vem:

$$T(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}_{L(h,\, k)}.$$

Segue que $L(h, k)$ é a variação que sofre T, quando se passa do ponto (x_0, y_0) ao ponto $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Por outro lado, $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ é a variação em f, quando se passa de (x_0, y_0) a $(x_0 + h, y_0 + k)$. Temos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \cong \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menores forem os módulos de h e k.

Muitas vezes, referir-nos-emos a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$ como a diferencial de f em (x_0, y_0), relativa aos acréscimos h e k.

Consideremos, agora, a função diferenciável $z = f(x, y)$. Em notação clássica, a diferencial de f, em (x, y), relativa aos acréscimos dx e dy é indicada por dz (ou por df):

② $$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy.$$

No que se segue, referir-nos-emos a ② simplesmente como a diferencial de $z = f(x, y)$.

O símbolo Δz será usado para representar a variação em f, quando se passa de (x, y) a $(x + dx, y + dy)$:

$$\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Assim,

$$\Delta z \cong dz$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menores forem os módulos de dx e dy.

EXEMPLO. Seja $z = x^2 y$.

a) Calcule a diferencial.
b) Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 2$ para $x = 1{,}02$ e $y = 2{,}01$.
c) Calcule o erro cometido na aproximação acima.

Solução

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$; assim, $dz = 2xy\, dx + x^2\, dy$.

b) $\Delta z \cong dz$ ou $\Delta z \cong 2xy\, dx + x^2\, dy$.
Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0{,}02$ e $dy = 0{,}01$ resulta $\Delta z \cong 0{,}09$.

c) $\Delta z = (x + dx)^2 (y + dy) - x^2 y = (1{,}02)^2 (1{,}01) - 2 = 0{,}091204$ (valor exato).
O erro cometido na avaliação acima é 0,001204.

Exercícios 11.4

1. Calcule a diferencial.

a) $z = x^3 y^2$
b) $z = x \operatorname{arc\,tg}(x + 2y)$
c) $z = \operatorname{sen} xy$
d) $u = e^{s^2 - r^2}$
e) $T = \ln(1 + p^2 + v^2)$
f) $x = \operatorname{arc\,sen} uv$

2. Seja $z = x$ a $e^{x^2 - y^2}$.

   a) Calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1{,}01$ e $y = 1{,}002$.
   b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1{,}01$ e $y = 1{,}002$.

3. Seja $z = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$.

   a) Calcule a diferencial de z no ponto $(1, 8)$.
   b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1{,}01$ e $y = 7{,}9$.
   c) Calcule um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0{,}9$ e $y = 8{,}01$.

4. Calcule um valor aproximado para a variação ΔA na área de um retângulo quando os lados variam de $x = 2$ m e $y = 3$ m para $x = 2{,}01$ m e $y = 2{,}97$ m.

5. Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura 0,03 m. As medidas internas são: altura 2 m e raio da base 1 m. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

6. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$ watts. Se $V = 100$ volts e $R = 10$ ohms, calcule um valor aproximado para a variação ΔP em P, quando V decresce 0,2 volt e R aumenta de 0,01 ohm.

7. A altura de um cone é $h = 20$ cm e o raio da base $r = 12$ cm. Calcule um valor aproximado para a variação ΔV no volume quando h aumenta 2 mm e r decresce 1 mm.

8. Calcule aproximadamente $(1{,}01)^{2{,}03}$.

9. Um dos catetos de um triângulo retângulo é $x = 3$ cm e o outro, $y = 4$ cm. Calcule um valor aproximado para a variação Δz na hipotenusa z, quando x aumenta 0,01 cm e y decresce 0,1 cm.

10. Defina diferencial de uma função de três variáveis.

11. Calcule a diferencial.

    a) $w = xyz$ *b*) $x = e^{2u + 2v - t^2}$ *c*) $w = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + z^2}$ *d*) $s = (1 + x^2)^{yz}$

12. Calcule aproximadamente $\sqrt{(0{,}01)^2 + (3{,}02)^2 + (3{,}9)^2}$.

11.5. O Vetor Gradiente

Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais em (x_0, y_0). O vetor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

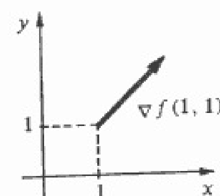
denomina-se *gradiente* de f em (x_0, y_0). Outra notação usada para o gradiente de f em (x_0, y_0) é: grad $f(x_0, y_0)$. Geometricamente, interpretaremos $\nabla f(x_0, y_0)$ como um vetor *aplicado* no ponto (x_0, y_0).

EXEMPLO. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule $\nabla f(1, 1)$ e represente-o geometricamente.

Solução

$\nabla f(x, y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (2x, 2y)$. Assim,

$$\nabla f(1, 1) = (2, 2) = 2\vec{i} + 2\vec{j}.$$



Suponhamos, agora, que $f(x, y)$ seja diferenciável em (x_0, y_0). Temos:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \frac{E(h, k)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Tendo em vista a igualdade

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)]$$

resulta

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Fazendo $X = (x, y)$ e $X_0 = (x_0, y_0)$ teremos:

$$f(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + E(X)$$

com

$$\lim_{X \to X_0} \frac{E(X)}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Já vimos que se $f(x)$ for função de variável real e diferenciável em x_0, então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x)$$

com

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Sendo $f(x, y)$ *diferenciável* em (x_0, y_0), nada mais natural, então, do que definir a *derivada* de f em (x_0, y_0) por: $f'(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)$. Assim, a derivada de $f(x, y)$ em (x_0, y_0) é o gradiente de f em (x_0, y_0).

Mais adiante, destacaremos as principais propriedades do vetor gradiente.

Exercícios 11.5

1. Calcule $\nabla f(x, y)$ sendo $f(x, y) =$

   a) x^2y *b)* $e^{x^2 - y^2}$

   c) $\frac{x}{y}$ *d)* arc tg $\frac{x}{y}$

2. Defina gradiente de uma função de três variáveis. Calcule $\nabla f(x, y, z)$ sendo $f(x, y, z) =$

   a) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *b)* $x^2 + y^2 + z^2$

   c) $(x^2 + y^2 + 1)^{z^2}$ *d)* z arc tg $\frac{x}{y}$

3. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo $(x_0, y_0) =$

   a) $(1, 1)$ *b)* $(-1, 1)$

   c) $(-1, -1)$ *d)* $(1, -1)$

4. Seja $f(x, y) =$ arc tg $\frac{x}{y}$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo (x_0, y_0) um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

5. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 1$, isto é, para todo t no domínio de γ, $f(x(t), y(t)) = 1$ (dê exemplo de uma tal curva). Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Prove que $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = 0$. Interprete geometricamente.

   (*Sugestão*. Para todo t no domínio de γ, $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$; derive em relação a t e faça $t = t_0$.)

6. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva diferencial cuja imagem está contida na superfície de nível $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Prove que $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Interprete geometricamente.

7. Calcule $f'(x, y)$ sendo $f(x, y) =$

   a) xy *b)* $2^{x - y}$

   c) x tg $\frac{x}{y}$ *d)* arc sen xy

8. Seja $f(x, y) = xy$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 2$. Mostre que para todo t em I, $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Dê exemplo de uma curva cuja imagem esteja contida na curva de nível $xy = 2$.

9. Sejam $f(x, y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\text{sen } t, \text{sen}^2 t)$.

   a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.
   b) Desenhe a imagem de γ.
   c) Verifique que para todo t, $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$.

10. Seja $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

   a) Dê exemplo de uma curva $\gamma(t)$, *diferenciável, cuja imagem esteja contida na superfície de nível* $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.
   b) Verifique que $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$. Interprete geometricamente.

11. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), y(t))$ uma curva diferenciável qualquer, com imagem contida na superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, e tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

   a) Prove que $\nabla(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.
   b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada, no ponto (x_0, y_0, z_0).
   c) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1, 1, 1)$.

12

Regra da Cadeia

12.1. Regra da Cadeia

Sejam $f(x, y)$ uma função definida num aberto do $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)$ uma curva definida num intervalo I, tais que $\gamma(t) \in D_f$ para todo $t \in I$. Nosso objetivo a seguir é provar que, se f e γ forem diferenciáveis, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será, também, diferenciável e vale a regra da cadeia

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

onde $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é o produto escalar dos vetores $\nabla f(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$.

Vamos precisar do seguinte lema.

> **Lema.** Se $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, for diferenciável em $X_0 \in A$, então existirá uma função $\varphi(X)$ definida em A tal que
>
> $$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \varphi(X) \| X - X_0 \|$$
>
> com $\lim\limits_{X \to X_0} \varphi(X) = 0 = \varphi(X_0)$.

Demonstração

Sendo f diferenciável em X_0 tem-se

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + E(X)$$

com

$$\lim_{X \to X_0} \frac{E(X)}{\| X - X_0 \|} = 0.$$

Tomando-se

$$\varphi(X) = \begin{cases} \dfrac{E(X)}{\| X - X_0 \|} & \text{se } X \neq X_0 \\ 0 & \text{se } X = X_0 \end{cases}$$

segue a nossa afirmação. Observe que $\varphi(X)$ é contínua em X_0. ■

Note que no lema acima nada muda se supusermos f uma função de n variáveis.

Antes de enunciar e demonstrar a regra da cadeia para derivação da composta de uma função de duas variáveis com uma curva, vejamos o seguinte exemplo.

EXEMPLO 1. Sejam $f(x, y) = xy$ e $\gamma(t) = (t^3, t^2)$. Considere a composta $F(t) = f(\gamma(t))$.

a) Calcule $F(t)$.
b) Calcule $F'(t)$ e verifique que $F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Solução

a) $F(t) = f(\gamma(t)) = f(t^3, t^2) = t^5$. Observe que F fornece os valores que $f(x, y)$ assume nos pontos da curva $\gamma(t) = (t^3, t^2)$.

b) $\nabla f(x, y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right) = (y, x)$; segue que $\nabla f(t^3, t^2) = (t^2, t^3)$. Por outro lado, $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$. Assim,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (t^2, t^3) \cdot (3t^2, 2t) = 3t^4 + 2t^4$$

ou seja,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 5\,t^4 = F'(t).$$

> ***Teorema.*** Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, tais que $\gamma(t) \in A$ para todo t no intervalo I. Nestas condições, se γ for diferenciável em t_0 e f em $X_0 = \gamma(t_0)$, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável em t_0 e vale a regra da cadeia
>
> $$F'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

Demonstração

Pelo lema, para todo $X \in A$,

① $$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \varphi(X) \| X - X_0 \|$$

onde

$$\lim_{X \to X_0} \varphi(X) = 0 = \varphi(X_0).$$

Substituindo em ① X por $\gamma(t)$ e X_0 por $\gamma(t_0)$ e dividindo por $t - t_0$, $t \neq t_0$, vem

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \varphi(\gamma(t)) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}.$$

Observe que

$$\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} = \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \cdot \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\|$$

De

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(\overset{0}{\gamma(t)}) \underbrace{\frac{|t - t_0|}{t - t_0}}_{\text{limitada}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_0} \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\| = \|\gamma'(t_0)\|$$

resulta

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(\gamma(t)) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} = 0.$$

Logo,

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0). \quad ■$$

A demonstração do teorema acima é exatamente a mesma, se substituirmos f de duas variáveis por f de n variáveis.

Segue desse último teorema que se f for diferenciável em $A \subset \mathbb{R}^2$ e γ diferenciável em I, então a composta $F(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável e, para todo t em I,

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Fazendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e lembrando que

$$\nabla f(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right) \text{ e } \gamma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

resulta:

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}.$$

Escreveremos com freqüência

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ficando subentendido que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ devem ser calculados em $(x(t), y(t))$ quando $\frac{dF}{dt}$ for calculado em t.

Com freqüência, ocorrerão, ainda, problemas do seguinte tipo: são dadas as funções diferenciáveis $z = f(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ e pede-se calcular $\frac{dz}{dt}$. Evidentemente, o que se deseja é a derivada da composta $z = f(x(t), y(t))$. Assim:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ou ainda,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Tudo se passa da mesma forma no caso em que f é uma função de três ou mais variáveis.

EXEMPLO 2. Sejam $z = x^2 y$, $x = e^{t^2}$ e $y = 2t + 1$. Calcule $\frac{dz}{dt}$.

Solução

1.º processo

$$z = x^2 y,\ x = e^{t^2} \text{ e } y = 2t + 1 \Rightarrow z = 2e^{2t^2}(2t + 1).$$

$$\frac{dz}{dt} = 4te^{2t^2}(2t + 1) + 2e^{2t^2}$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = 2e^{2t^2}[4t^2 + 2t + 1].$$

2.º processo (regra da cadeia)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2,\ \frac{dx}{dt} = 2te^{t^2} \text{ e } \frac{dy}{dt} = 2.$$

Assim,

$$\frac{dz}{dt} = 4xyte^{t^2} + 2x^2$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = 4te^{t^2}(2t+1)e^{t^2} + 2e^{2t^2} = 2e^{2t^2}[4t^2 + 2t + 1].$$

EXEMPLO 3. Seja $F(t) = f(e^{t^2}, \text{sen } t)$, onde $f(x, y)$ é uma função dada, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

a) Expresse $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Calcule $F'(0)$ supondo $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 5$.

Solução

a) $F(t) = f(x, y)$ onde $x = e^{t^2}$ e $y = \text{sen } t$.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{dy}{dt}.$$

Daí

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2}, \text{sen } t)\; 2te^{t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2}, \text{sen } t)\cos t.$$

b) $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)\cdot 1$; logo

$$F'(0) = 5.$$

EXEMPLO 4. $z = f(x^2, 3x + 1)$, onde $f(u, v)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

a) Expresse $\frac{dz}{dx}$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Verifique que $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=1} = 2\,\frac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3\,\frac{\partial f}{\partial v}(1, 4)$.

Solução

Sendo $f(u, v)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, $f(u, v)$ será diferenciável em $\mathbb{R}^2$; $u = x^2$ e $v = 3x + 1$ também são diferenciáveis. Podemos então, aplicar a regra da cadeia.

a) $z = f(u, v)$, $u = x^2$ e $v = 3x + 1$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\,\frac{dv}{dx},$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dx} = 2x\,\frac{\partial f}{\partial u}(x^2, 3x + 1) + 3\,\frac{\partial f}{\partial v}(x^2, 3x + 1).$$

Fazendo $x = 1$ na expressão anterior, obtemos:

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=1} = 2\,\frac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3\,\frac{\partial f}{\partial v}(1, 4).$$

EXEMPLO 5. Seja $g(x) = f(x, x^3 + 2)$, onde $f(x, y)$ é uma função dada, definida e diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^2$. Expresse $g'(x)$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

$g(x) = f(x, y)$ onde $y = x^3 + 2$.

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{dy}{dx}.$$

ou seja,

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x^3 + 2) + 3x^2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, x^3 + 2).$$

EXEMPLO 6. Suponha $f(x, y)$ diferenciável e que, para todo x,

$$f(3x + 1, 3x - 1) = 4.$$

Verifique que $\frac{\partial f}{\partial x}(3x + 1, 3x - 1) = -\frac{\partial f}{\partial y}(3x + 1, 3x - 1)$.

Solução

Para evitar confusão com as variáveis, vamos primeiro substituir x por t. Assim, para todo t,

$$f(3t + 1, 3t - 1) = 4.$$

Derivando em relação a t os dois membros obtemos:

$$\frac{d}{dt}[f(3t + 1, 3t - 1)] = 0.$$

Como

$$\frac{d}{dt}[f(3t + 1, 3t - 1)] = \frac{\partial f}{\partial x}(3t + 1, 3t - 1)\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(3t + 1, 3t - 1)\,\frac{dy}{dt}$$

$$= 3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3t + 1, 3t - 1) + 3\,\frac{\partial f}{\partial y}(3t + 1, 3t - 1)$$

teremos, para todo t,

$$3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3t+1,\,3t-1)+3\,\frac{\partial f}{\partial y}(3t+1,\,3t-1)=0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3t+1,\,3t-1)=-\frac{\partial f}{\partial y}(3t+1,\,3t-1).$$

Segue que, para todo x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,\,3x-1)=-\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,\,3x-1).$$

Observação. Sejam $f(x, y)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções diferenciáveis e seja $\gamma(x)=(g(x), h(x))$. Assim,

$$f(g(x),\,h(x))=f(\gamma(x)).$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}[f(g(x),\,h(x))]=\frac{d}{dx}[f(\gamma(x))]=\nabla f(\gamma(x))\cdot\gamma'(x),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x),\,h(x))]=\frac{\partial f}{\partial x}(g(x),\,h(x))\,g'(x)+\frac{\partial f}{\partial y}(g(x),\,h(x))\,h'(x).$$

Vamos, agora, resolver o exemplo anterior trabalhando diretamente com a equação

$$f(3x+1,\,3x-1)=4.$$

Derivando em relação a x os dois membros, obtemos:

$$\frac{d}{dx}[f(3x+1,\,3x-1)]=0.$$

Como (veja observação acima)

$$\frac{d}{dx}[f(3x+1,\,3x-1)]=\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,\,3x-1)(3x+1)'+\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,\,3x-1)(3x-1)'$$

$$=3\,\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,\,3x-1)+3\,\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,\,3x-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,\,3x-1)=-\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,\,3x-1).$$

EXEMPLO 7. $z=f(e^{-u}, u^2)$, onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável dada. Expresse $\dfrac{dz}{du}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

$z=f(x, y)$ onde $x=e^{-u}$ e $y=u^2$.

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\frac{dx}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\frac{dy}{du}$$

ou seja,

$$\frac{dz}{du}=-e^{-u}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+2u\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

onde $x=e^{-u}$ e $y=u^2$.

EXEMPLO 8. Sejam A e B abertos do $\mathbb{R}^2$, $f(x, y)$ diferenciável em A, $g(u, v)$ e $h(u, v)$ diferenciáveis em B tais que, para todo (u, v) em B, $(g(u, v), h(u, v))\in A$. Seja

$$F(u, v)=f(g(u, v),\,h(u, v)),\ (u, v)\in B.$$

(Observe que a mudança de variáveis $x=g(u, v)$ e $y=h(u, v)$ transforma a função de duas variáveis $z=f(x, y)$ na função de duas variáveis

$$z=F(u, v)=f(g(u, v),\,h(u, v)).)$$

Mostre que

a) $\dfrac{\partial F}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}\left(\text{ou }\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)$ onde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ devem ser calculadas no ponto $(g(u, v), h(u, v))$.

b) $\dfrac{\partial F}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\left(\text{ou }\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)$.

Solução

a) $F(u, v)=f(x, y)$ onde $x=g(u, v)$ e $y=h(u, v)$. Para calcular $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ vamos aplicar a regra da cadeia, olhando v como constante; tudo se passa como se x e y dependessem apenas de u:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial u}$$

onde $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$.

Cuidado. Escrevemos $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial y}{\partial u}$ e não $\frac{dx}{du}$ e $\frac{dy}{du}$ por se tratarem de derivadas parciais.

b) Para calcular $\frac{\partial F}{\partial v}$ vamos aplicar a regra da cadeia, olhando u como constante; tudo se passa como se x e y dependessem apenas de v:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial v}$$

onde $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$.

EXEMPLO 9. $z = f(u^2 + v^2, uv)$, onde $f(x, y)$ é uma função diferenciável dada. Expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

$z = f(x, y)$ onde $x = u^2 + v^2$ e $y = uv$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial u} = 2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v^2, uv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v^2, uv)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial v} = 2v\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + u\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

onde $x = u^2 + v^2$ e $y = uv$.

EXEMPLO 10. $F(r, \theta) = f(x, y)$ onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, sendo $f(x, y)$ uma função diferenciável dada. Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) + \text{sen}\,\theta\,\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta).$$

Solução

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial r}$$

① $$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \text{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

ou

② $$\frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

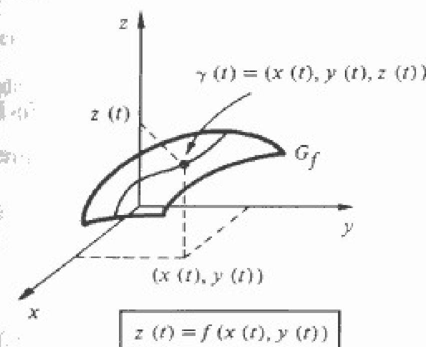
Multiplicando ① por sen θ, ② por cos θ e somando membro a membro obtemos a relação que queríamos.

EXEMPLO 11. Suponha $z = f(x, y)$ de classe C^1, $f(1, 2) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$. Admita que a imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, 3t - 1, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, esteja contida no gráfico de f.

a) Calcule $z'(t)$.
b) Ache a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

Solução

a) $(x, y, z) \in G_f \Leftrightarrow z = f(x, y)$. Como a imagem de γ está contida no gráfico de f, para todo t, $(t^2, 3t - 1, z(t)) \in G_f$, logo, $z(t) = f(t^2, 3t - 1)$.



b) A equação da reta tangente no ponto $\gamma(1)$ é:

$$(x, y, z) = \gamma(1) + \lambda\gamma'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos:

$$\gamma(1) = (1, 2, z(1)) = (1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, -2);$$

$$\gamma'(t) = \left(2t, 3, \frac{dz}{dt}\right);$$

$$z = f(t^2, 3t - 1) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t - 1)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t - 1)\frac{dy}{dt}.$$

Assim, $\frac{dz}{dt} = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t - 1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t - 1)$ e, portanto, $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = 18$. Segue que

$$\gamma'(1) = (2, 3, 18).$$

A equação da reta tangente é, então,

$$(x, y, z) = (1, 2, -2) + \lambda(2, 3, 18), \lambda \in \mathbb{R}.$$

O próximo exemplo mostra-nos que se γ for uma curva qualquer, diferenciável em t_0, cuja imagem está contida no gráfico da função $f(x, y)$, diferenciável em (x_0, y_0), então a reta tangente γ no ponto $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ está contida no plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

EXEMPLO 12. Seja $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0), $\gamma(t)$ uma curva diferenciável em t_0 cuja imagem está contida no gráfico de f. Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Então a reta tangente a γ no ponto a $\gamma(t_0)$ está contida no plano tangente ao gráfico de f no ponto $\gamma(t_0)$.

Solução

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$; como a imagem de γ está contida no gráfico de f

$$z(t) = f(x(t), y(t)).$$

Sendo f diferenciável em (x_0, y_0), $x(t)$ e $y(t)$ diferenciáveis em t_0, podemos aplicar a regra da cadeia para obter $z'(t_0)$:

① $$z'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,y'(t_0).$$

A equação da reta tangente em $\gamma(t_0)$ é:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Precisamos mostrar que, para todo λ, o ponto

$$(x_0 + \lambda x'(t_0), y_0 + \lambda y'(t_0), f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0))$$

pertence ao plano

② $$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Basta mostrar, então, que fazendo em ② $x = x_0 + \lambda x'(t_0)$ e $y = y_0 + \lambda y'(t_0)$ obteremos $z = f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0)$. De fato, para $x = x_0 + \lambda x'(t_0)$ e $y = y_0 + \lambda y'(t_0)$ temos:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\lambda x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\lambda y'(t_0),$$

ou seja,

$$z = f(x_0, y_0) + \lambda\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,y'(t_0)\right];$$

tendo em vista ①

$$z = f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0).$$

Exercícios 12.1

(Todas as funções são supostas de classe C^1 ou diferenciáveis, quando necessário)

1. Calcule $\frac{dz}{dt}$ pelo dois processos descritos no Exemplo 2.
   a) $z = \text{sen}\, xy$, $x = 3t$ e $y = t^2$.
   b) $z = x^2 + 3y^2$, $x = \text{sen}\, t$ e $y = \cos t$.
   c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x = \text{sen}\, 3t$ e $y = \cos 3t$.
2. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.
   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.
   b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{1}{3}$.
3. Expresse $\frac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $z = f(x, y)$ e
   a) $x = t^2$ e $y = 3t$.
   b) $x = \text{sen}\, 3t$ e $y = \cos 2t$.
4. Suponha que, para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

5. Suponha que, para todo x, $f(3x, x^3) = \text{arc tg } x$.

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$.

   b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$.

6. Admita que, para todo (x, y),

$$4y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2.$$

   Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2 \cos t, \text{sen } t)$.

7. Admita que, para todo (x, y),

$$4y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   Prove que f é constante sobre a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

   (*Sugestão*. Observe que a função g do exercício anterior fornece os valores de f sobre a elipse.)

8. A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

9. Admita que, para todo (x, y),

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   Mostre que $g(t) = f\left(t, \frac{2}{t}\right)$, $t > 0$, é constante.

10. Seja $z = f(u + 2v, u^2 - v)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

11. Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

12. Considere a função $F(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$. Mostre que $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

13. Prove que a função $u = f(x + at, y + bt)$, a e b constantes, é solução da equação a derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}.$$

14. Seja $z = t^2 f(x, y)$, onde $x = t^2$ e $y = t^3$. Expresse $\frac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f.

15. Seja g dada por $g(t) = f(x, y) \text{ sen } 3t$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$. Verifique que

$$g'(t) = 3f(x, y) \cos 3t + \text{sen } 3t \left[2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right],$$

   onde $x = 2t$ e $y = 3t$.

16. Seja $z = u f(u - v, u + v)$. Verifique que

$$u \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} = z + 2u^2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

17. Seja $g(x, y) = (x^2 + y^2) f(u, v)$, onde $u = 2x - y$ e $v = x + 2y$. Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x f(u, v) + (x^2 + y^2) \left[2 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right].$$

18. Seja $g(x)$ uma função diferenciável tal que $f(x, g(x)) = 0$, para todo $x \in D_g$. Mostre que

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

   para todo $x \in D_g$, com $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$.

19. $f(t)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que $g(t, f(t)) = 0$, para todo t. Suponha $f(0) = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 1) = 2$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = 4$. Determine a equação da reta tangente a $\gamma(t) = (t, f(t))$, no ponto $\gamma(0)$.

20. $f(x, y, z)$ e $g(x, y)$ são funções diferenciáveis tais que, para todo (x, y) no domínio de g, $f(x, y, g(x, y)) = 0$. Suponha $g(1, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 5$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, 3)$.

21. Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$; suponha $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$.

   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   b) Calcule $g'(0)$.

22. Seja $g(x, y) = x f(x^2 + y, 2y, 2x - y)$. Expresse $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

23. Suponha que, para todo (x, y), $f(x, y, x^2 + y^2) = 0$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 2)$.

24. Seja $F(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$. Mostre que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

25. Seja $F(u, v)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \neq 0$, para todo (u, v). Suponha que, para todo (x, y), $F(xy, z) = 0$, onde $z = z(x, y)$. Mostre que $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

26. Seja $f(x, y)$ diferenciável e homogênea de grau λ no aberto A. Prove:

a) $a\frac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda t^{\lambda - 1} f(a, b)$ para todo $t > 0$ e para todo $(a, b) \in A$, com $(at, bt) \in A$.

b) (Relação de Euler). Conclua de *a)* que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f.$$

(*Sugestão* para *a)*: Derive em relação a t os dois membros de $f(at, bt) = t^{\lambda} f(a, b)$.)

27. Seja $f(x, y)$ definida e diferenciável na bola aberta A. Suponha que f verifica em A a relação de Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y).$$

Prove que f é homogênea de grau λ.

$\left(\textit{Sugestão}. \text{ Mostre que } g(t) = \frac{f(at, bt)}{t^{\lambda}} \text{ é constante.}\right)$

28. Seja $\phi(u)$ uma função diferenciável qualquer. A função $f(x, y) = x^2 \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ verifica a relação de Euler $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f$? Por quê?

29. $f(x, y) = \dfrac{e^{\frac{x}{y}} \text{ arc tg } \frac{x}{y} + \text{sen}\left(\cos\frac{x}{y}\right)}{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}$ verifica a equação $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -f$? Por quê?

30. Determine uma família de funções que verifiquem a equação $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

31. Suponha $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e homogênea de grau λ. Prove que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é homogênea de grau $\lambda - 1$, isto é, que $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda - 1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ para todo $t > 0$, e para todo (x, y) em A com $(tx, ty) \in A$.
(*Sugestão*. Derive em relação a x os dois membros de $f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y)$.)

32. Seja $f(x, y)$ definida em $\mathbb{R}^2$, diferenciável em $(0, 0)$ e tal que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é linear, isto é, que existem reais a e b tais que $f(x, y) = ax + by$.

33. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Verifique que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ para todo t e todo (x, y).
b) Olhe para o Exercício. 32 e responda: f é diferenciável em $(0, 0)$? Por quê?

34. Seja $f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$

$$① \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

a) Verifique que a função $g(u, v)$ dada por $g(u, v) = f(x, y)$, onde $x = u + v$ e $y = u$, é tal que $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ em $\mathbb{R}^2$. Conclua que $g(u, v) = \varphi(v)$ para alguma função φ, definida e diferenciável em $\mathbb{R}$.

b) Determine uma família de soluções da equação ①.

c) $f(x, y) = \dfrac{e^{(x - y)^2} + \text{arc tg}(\text{sen}(x - y)) + \ln[1 + (x - y)^2]}{(x - y)^2 + 5}$ verifica ①? (Não precisa fazer contas!)

12.2. Derivação de Funções Definidas Implicitamente. Teorema das Funções Implícitas

Como já vimos, a função $y = g(x)$ é *definida implicitamente* pela equação $f(x, y) = 0$ se, para todo $x \in D_g$,

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Admitindo que f e g sejam diferenciáveis, vamos deduzir uma fórmula para o cálculo de $g'(x)$ em todo $x \in D_g$, para os quais $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$. Então, derivando em relação a x os dois membros da equação anterior, obtemos,

$$\frac{d}{dx}[f(x, \overbrace{g(x)}^{y})] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\, g'(x) = 0$$

e, portanto,

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)}, \quad y = g(x),$$

desde que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$.

Da mesma forma, $x = h(y)$ é definida implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$ se, para todo $y \in D_h$,

$$f(h(y), y) = 0.$$

Supondo f e h diferenciáveis e derivando os dois membros da equação acima em relação a y, obtemos:

$$\frac{d}{dy}[f(\underbrace{h(y)}_{x}, y)] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dy} = 0$$

e, portanto,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}, \quad x = h(y),$$

em todo $y \in D_h$, com $\frac{\partial f}{\partial x}(h(y), y) \neq 0$.

EXEMPLO 1. A função diferenciável $y = y(x)$ é definida implicitamente pela equação

$$y^3 + xy + x^3 = 3.$$

Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e de y.

Solução

1.º processo

$$\underbrace{y^3 + xy + x^3 - 3}_{f(x, y)} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}$$

em todo x no domínio de $y = y(x)$, com $3(y(x))^2 + x \neq 0$.

2.º processo

$$\frac{d}{dx}[y^3 + xy + x^3] = \frac{d}{dx}(3)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}.$$

EXEMPLO 2. Suponha que a função diferenciável $z = g(x, y)$ seja dada implicitamente pela equação $f(x, y, z) = 0$, onde f é diferenciável num aberto de $\mathbb{R}^3$. Verifique que

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}$

em todo $(x, y) \in D_g$, com $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \neq 0$.

b) $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}$$

em todo $(x, y) \in D_g$, com $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \neq 0$.

Solução

a) Para todo $(x, y) \in D_g$

① $$f(x, y, g(x, y)) = 0.$$

Derivando em relação a x os dois membros da equação, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y, \overbrace{g(x, y)}^{z})] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

como $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ e $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$, resulta

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}.$$

b) Derivando os dois membros de ① em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y, \overbrace{g(x, y)}^{z})] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x)}_{0} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(y)}_{1} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

e, portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}.$$

EXEMPLO 3. A função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação

$$xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 5.$$

Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x, y e z.

Solução

1.º processo

$$\underbrace{xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 5}_{f(x, y, z)} = 0$$

Pela parte *a*) do exemplo anterior

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{yz + 3x^2}{xy + 3z^2}.$$

2.º processo

$$\frac{\partial}{\partial x}[xyz + x^3 + y^3 + z^3] = \frac{\partial}{\partial x}(5),$$

assim,

$$yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + 3x^2}{xy + 3z^2}.$$

EXEMPLO 4. As funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$, definidas no intervalo aberto I, são dadas implicitamente pelo sistema

① $$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

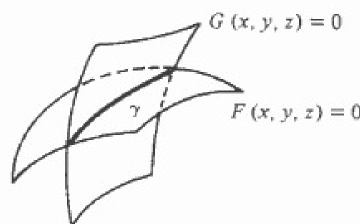
onde F e G são supostas diferenciáveis num aberto de $\mathbb{R}^3$. Expresse $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ em termos das derivadas parciais de F e de G.

Solução

Dizer que $y = y(x)$ e $z = z(x)$ estão definidas implicitamente por ① significa que, para todo x em I,

② $$F(x, y(x), z(x)) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y(x), z(x)) = 0,$$

ou seja, significa que a imagem da curva $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$ está contida na intersecção das superfícies $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$.



Para obter $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, vamos derivar em relação a x os dois membros de ②. Temos, então:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{dx}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x} \end{cases}$$

Pela regra de Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

para todo $x \in I$, com $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$ em $(x, y(x), z(x))$.

Notações. O símbolo $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}$ é usado para indicar o *determinante jacobiano* de F e G em relação a y e z:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Da mesma forma:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}$$

Com estas notações, $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ se escrevem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

EXEMPLO 5. Sejam $y = y(x)$ e $z = z(x)$ diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e dadas implicitamente pelo sistema

① $$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

b) Determine um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ que sejam dadas implicitamente pelo sistema ①.

Solução

a) Para obtermos $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, vamos derivar os dois membros de ① em relação a x, observando que y e z são funções de x:

$$\frac{d}{dx}[2x + y - z] = \frac{d}{dx}[3], \text{ ou seja, } 2 + \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 0;$$

$$\frac{d}{dx}[x + y + z] = \frac{d}{dx}[1], \text{ ou seja, } 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2 \\ \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}.$$

(Sugerimos ao leitor calcular $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ utilizando o exemplo anterior.)

b) ① é equivalente a $\begin{cases} y - z = 3 - 2x \\ y + z = 1 - x \end{cases}$.

Resolvendo o sistema nas incógnitas y e z obtemos:

$$y = 2 - \frac{3}{2}x \quad \text{e} \quad z = -1 + \frac{1}{2}x.$$

Observe que a imagem de

$$\gamma(x) = \left(x, 2 - \frac{3}{2}x, -1 + \frac{1}{2}x\right)$$

é a reta intersecção dos planos $2x + y - z = 3$ e $x + y + z = 1$.

EXEMPLO 6. Sejam $y = y(x)$ e $z = z(x)$, $z > 0$, diferenciáveis e dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

a) Expresse $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ em termos de x, y e z.

b) Expresse y e z em função de x.

c) Desenhe a imagem da curva $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$.

Solução

a) $\frac{d}{dx}[x^2 + y^2 + z^2] = \frac{d}{dx}[1]$, ou seja, $2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2z\frac{dz}{dx} = 0$;

$$\frac{d}{dx}[x + y] = \frac{d}{dx}(1), \text{ ou seja, } 1 + \frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = -x \\ \frac{dy}{dx} = -1 \end{cases}$$

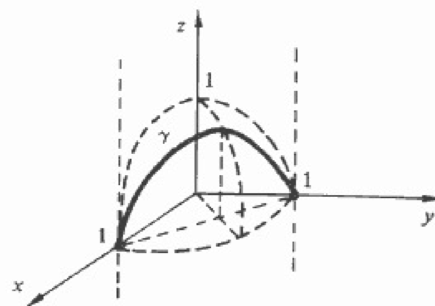
Resolvendo o sistema obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{z}.$$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases}$

Substituindo $y = 1 - x$ na 1.ª equação e observando que $z > 0$ obtemos: $z = \sqrt{2x - 2x^2}$.
Assim, $y = 1 - x$ e $z = \sqrt{2x - 2x^2}$, com $0 < x < 1$.

c)



A imagem de γ está contida na intersecção do plano $x + y = 1$ com a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Até agora, o problema referente a uma função $y = g(x)$ dada implicitamente por uma equação $F(x, y) = 0$ era colocado da seguinte forma: *suponha* $y = g(x)$ diferenciável e definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$; calcule $\frac{dy}{dx}$. Evidentemente, $\frac{dy}{dx}$ só terá significado se realmente $F(x, y) = 0$ definir implicitamente alguma função $y = g(x)$. Por exemplo, $x^2 + y^2 = -3$ não define implicitamente função alguma; logo, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ não terá, neste caso, nenhum significado.

O teorema que vamos enunciar a seguir fornece-nos uma condição suficiente para que a equação $F(x, y) = 0$ defina implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$. Antes, porém, vamos ver alguns exemplos.

EXEMPLO 7. Seja $F(x, y)$ de classe C^1 num aberto A de $\mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$, com $F(x_0, y_0) = 0$. Suponha que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Prove que existem intervalos abertos I e J, com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, tais que, para cada $x \in I$, existe um único $g(x) \in J$, com $F(x, g(x)) = 0$.

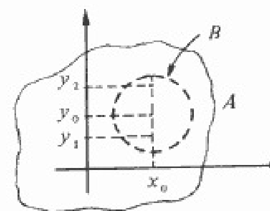
Solução

$\frac{\partial F}{\partial y}$ é contínua, pois, por hipótese, F é de classe C^1. Como $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, pelo teorema da conservação do sinal existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), que podemos supor contida em A, pois A é aberto, tal que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0 \text{ em } B.$$

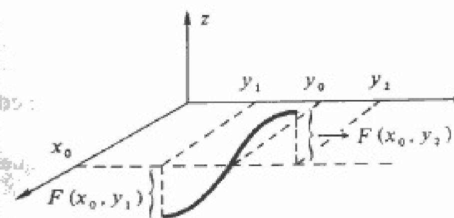
Sejam y_1 e y_2 tais que $y_1 < y_0 < y_2$, com (x_0, y_1) e (x_0, y_2) em B. Fixado x_0, consideremos a função

① $$z = F(x_0, y),\ y \in [y_1, y_2]$$

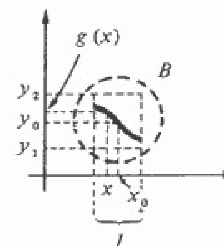


Como $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0$ para todo $y \in [y_1, y_2]$, segue que ① é estritamente crescente em $[y_1, y_2]$. Tendo em vista que $F(x_0, y_0) = 0$, resulta:

② $$F(x_0, y_1) < 0 \quad \text{e} \quad F(x_0, y_2) > 0.$$



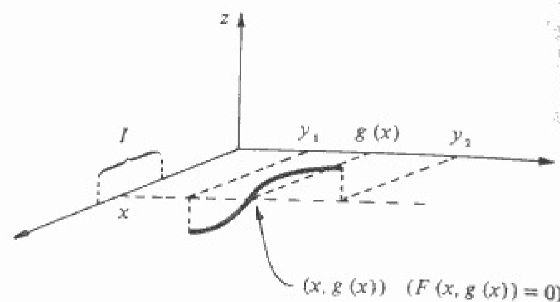
Seja $J =]y_1, y_2[$; observe que $y_0 = g(x_0)$ é o único número em J tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Tendo em vista ② e pela continuidade de F, existe um intervalo aberto I, com $x_0 \in I$, tal que para todo $x \in I$, (x, y_1) e (x, y_2) pertencem a B, com $F(x, y_1) < 0$ e $F(x, y_2) > 0$.



Como $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ em B, para todo $x \in I$, a função

③ $$z = F(x, y)\ (x \text{ fixo})$$

é estritamente crescente em $[y_1, y_2]$; tendo em vista que $F(x, y_1) < 0$ e $F(x, y_2) > 0$, pelo teorema do valor intermediário e pelo fato de ③ ser estritamente crescente em $[y_1, y_2]$, existirá um único $g(x) \in]y_1, y_2[$ tal que $F(x, g(x)) = 0$ (veja figura seguinte).



A função $g : I \to J$ está definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$.

Observação. Para todos $\overline{y_1}$ e $\overline{y_2}$, com $y_1 < \overline{y_1} < y_0 < \overline{y_2} < y_2$, procedendo como acima, encontraremos um intervalo aberto $I_1 \subset I$, com $x_0 \in I$, tal que

$$x \in I_1 \Rightarrow g(x) \in]\overline{y_1}, \overline{y_2}[\;;$$

logo, g é contínua em x_0. Deixamos a seu cargo verificar que g é contínua em todo $x \in I$.

EXEMPLO 8. Suponha $F(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0). Prove que existem funções $\varphi_1(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$, definidas em D_F, tais que

④
$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \varphi_1(x, y)(x - x_0) + \varphi_2(x, y)(y - y_0)$$

com

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \varphi_1(x, y) = 0 = \varphi_1(x_0, y_0) \text{ e } \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \varphi_2(x, y) = 0 = \varphi_2(x_0, y_0).$$

Solução

Pelo lema da Seç. 12.1,

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \varphi(x, y)\,\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

onde $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \varphi(x, y) = 0 = \varphi(x_0, y_0)$.

Para $(x, y) \neq (x_0, y_0)$,

$$\varphi(x, y)\,\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \varphi(x, y)\,\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} =$$
$$= \varphi(x, y)\,\frac{x - x_0}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}(x - x_0) + \varphi(x, y)\,\frac{y - y_0}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}(y - y_0).$$

Basta tomar

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y)\,\dfrac{x - x_0}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} & \text{se } (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

e

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y)\,\dfrac{y - y_0}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} & \text{se } (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

EXEMPLO 9. Prove que a função g do Exemplo 7 é diferenciável em x_0 e que

$$g'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}.$$

Solução

Substituindo $y = g(x)$ e $y_0 = g(x_0)$ em ④ do Ex. 8 e lembrando que $F(x, g(x)) = 0$ e $F(x_0, g(x_0)) = 0$ resulta, após dividir por $x - x_0$ $(x \neq x_0)$:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \varphi_1(x, g(x)) + \varphi_2(x, g(x))\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Pelo fato de g ser contínua em x_0 e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, resulta:

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}.$$

Teorema das funções implícitas *(Caso $F(x, y) = 0$).* Seja $F(x, y)$ de classe C^1 num aberto A de $\mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$, com $F(x_0, y_0) = 0$. Nesta condições, se $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então existirão intervalos abertos I e J, com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, tais que, para cada $x \in I$, existe um único $g(x) \in J$, com $F(x, g(x)) = 0$. A função $g : I \to J$ é diferenciável e

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Demonstração

Veja Exemplos 7, 8 e 9. ■

Observação. Se a hipótese $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ for substituída por $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, então existirão intervalos abertos I e J, com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, tais que, para cada $y \in J$, existirá um único $h(y) \in I$, com $F(h(y), y) = 0$. A função $h : J \to I$ será diferenciável e

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)}.$$

Teorema das funções implícitas *(Caso $F(x, y, z) = 0$).* Seja $F(x, y, z)$ de classe C^1 no aberto A de $\mathbb{R}^3$ e seja $(x_0, y_0, z_0) \in A$, com $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nestas condições, se $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, então existirão uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) e um intervalo aberto J, com $z_0 \in J$, tais que, para cada $(x, y) \in B$, existe um único $g(x, y) \in J$, com $F(x, y, g(x, y)) = 0$. A função $z = g(x, y)$, $(x, y) \in B$, é diferenciável e

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

Demonstração

Deixamos a cargo do leitor adaptar a demonstração do teorema anterior a este caso. ■

Observação. Note que, pelo fato de F ser de classe C^1 e g contínua, as funções $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))$ serão contínuas em B; logo, $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ serão, também, contínuas em B, isto é, g é de classe C^1 em B.

Teorema das funções implícitas *(Caso $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$).* Sejam $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z)$ de classe C^1 no aberto A de $\mathbb{R}^3$ e seja $(x_0, y_0, z_0) \in A$, com $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $G(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nestas condições, se $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$ em (x_0, y_0, z_0), então existirão um intervalo aberto I, com $x_0 \in I$, e um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ definidas e de classe C^1 em I, tais que, para todo $x \in I$, $F(x, y(x), z(x)) = 0$ e $G(x, y(x), z(x)) = 0$; além disso, $y_0 = y(x_0)$ e $z_0 = z(x_0)$. Tem-se, ainda:

① $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

sendo que os determinantes jacobianos devem ser calculados em $(x, y(x), z(x))$.

Demonstração

Como F e G são classe C^1 em A, e

② $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

pelo teorema da conservação do sinal $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}$ permanece diferente de zero numa bola aberta de centro (x_0, y_0, z_0). Podemos, então, supor que $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$ em A. Segue de ② que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Suponhamos $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pelo teorema anterior, a equação

$$F(x, y, z) = 0$$

define implicitamente uma função $z = g(x, y)$, $(x, y) \in B$, sendo g de classe C^1 na bola aberta B de centro (x_0, y_0) e $z_0 = g(x_0, y_0)$. Consideremos, agora, a função

$$H(x, y) = G(x, y, g(x, y)), \ (x, y) \in B.$$

Temos: $H(x, y)$ é de classe C^1, $H(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ (verifique). Segue que a equação

$$H(x, y) = 0, \text{ ou seja, } G(x, y, g(x, y)) = 0$$

define implicitamente uma função $y = y(x)$, $x \in I$, sendo $y(x)$ de classe C^1 no intervalo aberto I e $y_0 = y(x_0)$ ($x_0 \in I$). Deixamos para o leitor completar a demonstração. ■

No Vol. 3, voltaremos aos teoremas da função implícita e da função inversa.

Exercícios 12.2

1. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Em caso afirmativo, expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

   (*Sugestão.* Observe que $(0, \sqrt[3]{4})$ satisfaz a equação e utilize o teorema das funções implícitas (caso $F(x, y) = 0$).)

2. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

   a) $x^2y + \text{sen } y = x$ *b)* $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$

3. Mostre que cada uma das equações a seguir define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x, y)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

   a) $e^{x+y+z} + xyz = 1$ *b)* $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$

4. Suponha que $y = y(x)$ seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde $F(u, v)$ é suposta diferenciável. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de F.

5. Suponha que $y = g(x)$ seja diferenciável no intervalo aberto I e dada implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é suposta de classe C^2. Suponha, ainda, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ em D_f.

   a) Prove que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ é uma *condição necessária* para que x_0 seja ponto de máximo local de g.
   b) Prove que g'' é contínua em I.
   c) Prove que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} < 0 \text{ em } (x_0, y_0)$$

   é *condição suficiente* para que x_0 seja ponto de máximo local de g.

6. A função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\frac{x}{y}, z\right) = 0$, onde $f(u, v)$ é suposta diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

7. A função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ um real fixo), onde $f(u, v)$ é suposta diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z.$$

8. Suponha que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$① \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

   a) Expresse $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ em termos de x, y e z.
   b) Determine um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ dadas implicitamente por ①.

9. Suponha que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad (x \neq 0).$$

   Mostre que $\frac{\partial x}{\partial u}\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 1$.

10. Sejam $u = x + y$ e $v = \dfrac{y}{x}$. Calcule o determinante jacobiano $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

11. Calcule:

a) $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$ sendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $G(x, y, z) = x + y + z$.

b) $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}$ sendo $u = xyz$ e $v = x^3 + y^2$.

c) $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$.

d) $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$.

12. Seja $g(u, v) = f(x, y)$, onde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ são dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

Suponha $x \dfrac{\partial f}{\partial x} - y \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

a) Mostre que $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{y}{x} \dfrac{\partial x}{\partial u}$.

b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}$.

c) Mostre que f é constante sobre as hipérboles $xy = c$.

13. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente pelo sistema

$$① \quad \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

a) Expresse $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ em termos de x e y.

b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente por ①.

14. Sejam $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ e $z = z(x, y)$ definidas implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$. Suponha $x_0 = x(y_0, y_0)$, $y_0 = y(x_0, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$ e que no ponto (x_0, y_0, z_0) as derivadas parciais de F sejam diferentes de zero. Mostre que

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{\substack{y = y_0 \\ z = z_0}} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{\substack{x = x_0 \\ z = z_0}} \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = -1.$$

15. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + uy^2 = v \\ x + y^2 = u. \end{cases}$$

a) Expresse $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ em termos de x, y e u.

b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas implicitamente pelo sistema.

13

Gradiente e Derivada Direcional

13.1. Gradiente de uma Função de Duas Variáveis: Interpretação Geométrica

O gradiente de uma função $f(x, y)$ foi introduzido na Seç. 11.5; nosso objetivo aqui é interpretá-lo geometricamente. Antes vamos recordar a regra da cadeia: se $f(x, y)$ for diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma(t)$ diferenciável no intervalo aberto I, onde $\gamma(t) \in A$ para todo $t \in I$, então, $h(t) = f(\gamma(t))$ será diferenciável e

$$h'(t) = \frac{d}{dt}[f(\gamma(t))] = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Seja $f(x, y)$ de classe C^1 num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja (x_0, y_0) um ponto da curva de nível $f(x, y) = c$; suponhamos $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Vamos mostrar a seguir que $\nabla f(x_0, y_0)$ é *perpendicular* em (x_0, y_0) a toda curva γ, diferenciável, passando por (x_0, y_0) e cuja imagem esteja contida na curva de nível $f(x, y) = c$ (nas condições acima, pelo teorema das funções implícitas, uma tal curva existe). Seja, então, $\gamma(t)$, $t \in I$, uma tal curva, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$; como estamos admitindo que a imagem de γ está contida na curva de nível $f(x, y) = c$, teremos

① $$f(\gamma(t)) = c$$

para todo t no domínio de γ. Derivando os dois membros de ① em relação a t, obtemos:

$$\frac{d}{dt}[f(\gamma(t))] = \frac{d}{dt}(c)$$

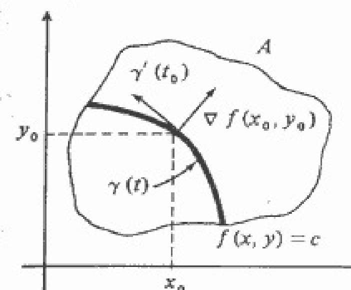
ou

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, t \in I.$$

e, portanto,

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

ou seja, $\nabla f(x_0, y_0)$ é *perpendicular* a γ, em $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$.



Dizemos, então, que $\nabla f(x_0, y_0)$ é *um vetor normal* à curva de nível $f(x, y) = c$, *em* (x_0, y_0). A reta passando por (x_0, y_0) e perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ denomina-se *reta tangente*, em (x_0, y_0), à curva de nível $f(x, y) = c$. A equação de tal reta é:

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0.$$

EXEMPLO 1. A curva $\gamma(t)$ passa pelo ponto $(1, 2)$ e é tal que $f(\gamma(t)) = 6$ para todo t no domínio de γ, onde $f(x, y) = x^3y^3 - xy$ (observe que a imagem de γ está contida na curva de nível $f(x, y) = 6$). Suponha $\gamma(t_0) = (1, 2)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 2)$.

Solução

$$\nabla f(1, 2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)\right) = (22, 11).$$

A reta tangente a γ em $\gamma(t_0) = (1, 2)$ coincide com a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ em $(1, 2)$. Assim, a equação da reta tangente a γ em $(1, 2)$ é:

$$\nabla f(1, 2) \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$$

ou

$$22(x - 1) + 11(y - 2) = 0$$

ou

$$y = -2x + 4.$$

Vejamos como fica, em notação vetorial, a equação desta reta. O vetor $(-11, 22)$ é perpendicular a $\nabla f(1, 2) = (22, 11)$; logo, $(-11, 22)$ é paralelo a $\gamma'(t_0)$; assim, a equação da reta tangente acima pode, também, ser dada na forma

$$(x, y) = (1, 2) + \lambda(-11, 22),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 2. Considere a equação a derivadas parciais

$$\text{②} \qquad 2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

a) Com argumentos geométricos, obtenha solução de ②.

b) Suponha $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável; prove que se f satisfaz ②, então existe $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $f(x, y) = \varphi(2y - x)$.

Solução

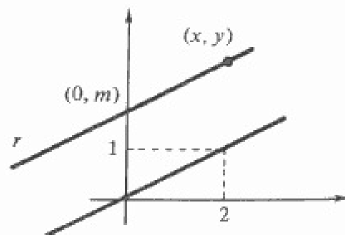
a) Sendo $f(x, y)$ solução de ②, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ou

$$(2, 1) \cdot \nabla f(x, y) = 0.$$

Como para todo (x, y), $\nabla(x, y)$ é perpendicular ao vetor $(2, 1)$ e como $\nabla f(x, y)$ é perpendicular, em (x, y), à curva de nível de f que passa por este ponto, é razoável esperar que as curvas de nível de f sejam retas paralelas ao vetor $(2, 1)$; assim f deve ser constante sobre cada reta paralela ao vetor $(2, 1)$.



Sendo $f(x, y)$ constante sobre a reta r

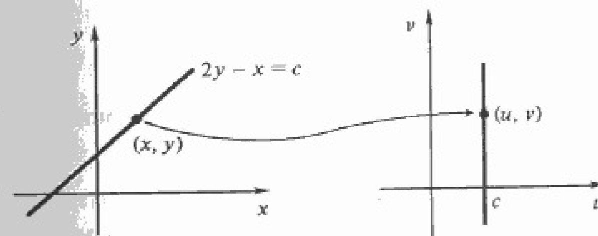
$$f(x, y) = f(0, m), \text{ onde}$$

$\frac{y - m}{x - 0} = \frac{1}{2}$, ou, $m = \frac{2y - x}{2}$. Assim, $f(x, y) = f\left(0, \frac{2y - x}{2}\right)$; tomando-se $\varphi(u) = f\left(0, \frac{u}{2}\right)$, resulta $f(x, y) = \varphi(2y - x)$, onde $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável. Verifique você que, para toda $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, $f(x, y) = \varphi(2y - x)$ é solução de ②. Assim, as funções sen $(2y - x)$, $e^{2y - x}$, $\frac{(2y - x)^2 + e^{2y - x}}{(2y - x)^4 + 1}$ etc. são soluções de ②.

Observação. Consideremos a mudança de variável

$$\begin{cases} u = 2y - x \\ v = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2v - u \\ y = v \end{cases}$$

Note que quando (x, y) percorre a reta $2y - x = c$ o correspondente ponto (u, v) percorrerá a reta vertical $u = c$.



Seja $g(u, v) = f(x, y)$, com $x = 2v - u$ e $y = v$. Vimos, geometricamente, que f deve ser constante sobre as retas $2y - x = c$; é de se esperar, então, que g seja constante sobre as retas $u = c$, ou seja, que g não dependa de v. Vamos, agora, resolver a parte *b*).

b) Seja $f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$; supondo f solução de ② teremos

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Seja $g(u, v) = f(x, y)$ com $x = 2v - u$ e $y = v$ (veja observação anterior). Temos:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial v}$$

ou

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \underbrace{2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}_{0}.$$

Assim, para todo (u, v) em $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0$$

o que mostra que g não depende de v, isto é,

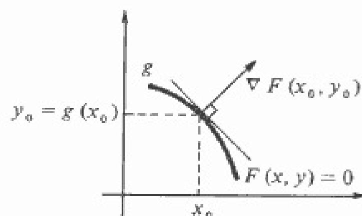
$$g(u, v) = \varphi(u),$$

para alguma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Portanto, $f(x, y) = \varphi(2y - x)$, onde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Vejamos, agora, como utilizar o gradiente de uma função de duas variáveis na obtenção da reta tangente e da reta normal ao gráfico de uma função $y = g(x)$ de uma variável. Para isto, consideremos a função de duas variáveis $F(x, y) = g(x) - y$; evidentemente, o gráfico de g coincide com a curva de nível $F(x, y) = 0$. Seja (x_0, y_0), com $y_0 = g(x_0)$, um ponto do gráfico de g.

Segue que $\nabla F(x_0, y_0)$ é normal ao gráfico de g em (x_0, y_0). Como

$$\nabla F(x, y) = (g'(x), -1)$$



resulta, $\nabla F(x_0, y_0) = (g'(x_0), -1)$. A equação da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abscissa x_0, é, então

$$(g'(x_0), -1) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0$$

ou

$$g'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0$$

ou, ainda, $y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0)$.

Por outro lado, a equação da reta normal ao gráfico de g no ponto de abscissa x_0 é:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda (g'(x_0), -1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos, agora, que a função diferenciável $y = g(x)$ seja dada implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$, onde F é suposta diferenciável e $\nabla F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, com $y_0 = g(x_0)$ (observe que a situação anterior é um caso particular desta). Segue que, para todo x no domínio de g, $F(x, g(x)) = 0$, isto é, a imagem da curva $\gamma(x) = (x, g(x))$ está contida na curva

de nível $F(x, y) = 0$. Assim, *$\nabla F(x_0, y_0)$ é normal ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0)*. Podemos, também, ter chegado a este resultado, no caso $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, observando que

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

é o coeficiente angular da direção determinada pelo vetor $\nabla F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j}$ e que

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

(fórmula de derivação implícita) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g no ponto (x_0, y_0).

EXEMPLO 3. $y = f(x)$ é uma função diferenciável definida implicitamente pela equação $y^3 + xy + x^3 = 3x$. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

Solução

$$y^3 + xy + x^3 = 3x \Leftrightarrow \underbrace{y^3 + xy + x^3 - 3x}_{F(x,\, y)} = 0$$

$\nabla F(1, 1)$ é perpendicular ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$. Temos:

$$\nabla F(1, 1) = (1, 4), \text{ pois, } \nabla F(x, y) = (y + 3x^2 - 3, 3y^2 + x)$$

Reta tangente:

$$\nabla F(1, 1) \cdot [(x, y) - (1, 1)] = 0$$

ou seja,

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Reta normal:

$$y - 1 = 4(x - 1) \text{ ou } y = 4x - 3.$$

Ou, em forma vetorial:

$$(x, y) = (1, 1) + \lambda (1, 4), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercícios 13.1

1. É dada uma curva γ que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

   a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 3)$.
   b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

2. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2, 5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e que a sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto?

3. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.

   a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$.

   b) $e^{2x - y} + 2x + 2y = 4$ em $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

4. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

5. Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

6. Utilizando argumentos geométricos, determine soluções da equação a derivadas parciais dada.

   a) $3\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *b*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

   c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *d*) $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

7. Determine uma função $z = f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ e cujo gráfico passe pelos pontos $(1, 1, 3)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 2)$.

8. Determine uma função $z = f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e cujo gráfico contenha a imagem da curva $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

9. Determine uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que passe pelo ponto $\gamma(0) = (1, 2)$ e que intercepte ortogonalmente as curvas da família $x^2 + 2y^2 = c$.

10. Determine uma função $y = y(x)$ cujo gráfico intercepte ortogonalmente as curvas da família $xy = c$, com $x > 0$ e $y > 0$, e tal que

    a) $y(1) = 1$ *b*) $y(1) = 2$

11. Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que $\nabla f(x, y) = g(x, y)(x, y)$, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, onde $g(x, y)$ é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dada.

    a) Com argumentos geométricos, verifique que é razoável esperar que f seja constante sobre cada circunferência de centro na origem.

    b) Prove que f é constante sobre cada circunferência de centro na origem.

    (*Sugestão*. $g(t) = f(R \cos t, R \operatorname{sen} t)$ fornece os valores de f sobre a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$.)

12. Seja $y = g(x)$ definida e derivável no intervalo aberto I, dada implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Suponha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ em A.

    a) Com argumentos geométricos, mostre que é razoável esperar que g seja estritamente decrescente em I.

    b) Prove que g é estritamente decrescente em I.

13.2. Gradiente de Função de Três Variáveis: Interpretação Geométrica

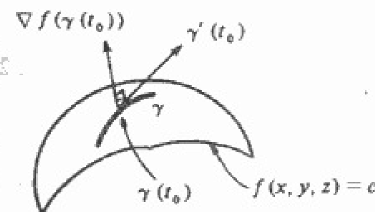
Seja $f(x, y, z)$ de classe C^1 num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja (x_0, y_0, z_0) um ponto da superfície de nível $f(x, y, z) = c$; suponhamos $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Vamos mostrar que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é *normal* em (x_0, y_0, z_0) a toda curva γ, diferenciável, passando por este ponto e cuja imagem esteja contida na superfície de nível $f(x, y, z) = c$. Seja, então, $\gamma(t)$, $t \in I$, uma tal curva, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$; como estamos supondo que a imagem de γ está contida na superfície de nível $f(x, y, z) = c$, teremos

① $$f(\gamma(t)) = c$$

para todo t no domínio de γ. Derivando, em relação a t, ambos os membros da equação ① obtemos, para todo $t \in I$,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

e, portanto, $\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$, o que mostra que $\nabla f(\gamma(t_0))$ e $\gamma'(t_0)$ são ortogonais.



Fica provado assim que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *é normal em* (x_0, y_0, z_0) *a toda curva diferenciável* γ *passando por este ponto e com imagem contida na superfície* $f(x, y, z) = c$. Diremos, então,

que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é *normal à superfície de nível* $f(x, y, z) = c$, *no ponto* (x_0, y_0, z_0). O plano passando pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ denomina-se *plano tangente*, em (x_0, y_0, z_0), à superfície $f(x, y, z) = c$. A equação deste plano é:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0.$$

A reta

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

denomina-se *reta normal*, em (x_0, y_0, z_0), à superfície $f(x, y, z) = c$.

Seja $z = g(x, y)$ uma função diferenciável dada implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ onde $F(x, y, z)$ é suposta de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^3$; seja (x_0, y_0, z_0), $z_0 = g(x_0, y_0)$, um ponto do gráfico de g, com $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$. Como o gráfico de g está contido na superfície $F(x, y, z) = 0$, resulta que toda curva γ com imagem contida no gráfico de g tem, também, sua imagem contida na superfície $F(x, y, z) = 0$; assim, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é normal ao gráfico de g, em (x_0, y_0, z_0).

Observe que se $\gamma(t)$ é uma curva diferenciável com imagem contida na intersecção das superfícies $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$, onde F e G são supostos de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^3$ e $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, então o vetor $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$, tangente a γ em $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, é paralelo a $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0)$ (verifique).

EXEMPLO 1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$ no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução

$$xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z \Leftrightarrow \underbrace{xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z}_{F(x,\,y,\,z)} = 0.$$

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3).$$

$$\nabla F(1, -1, 2) = (1, 5, 8).$$

Plano tangente em (1, −1, 2):

$$\nabla F(1, -1, 2) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 2)] = 0$$

ou

$$(1, 5, 8) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 2)] = 0$$

ou seja,

$$(x - 1) + 5(y + 1) + 8(z - 2) = 0$$

ou, ainda,

$$x + 5y + 8z = 12.$$

Reta normal em (1, −1, 2):

$$(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda (1, 5, 8), \lambda \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 2. Considere a função $z = f(x, y)$ dada por $f(x, y) = \sqrt{8 - 3x^2 - y^2}$. Determine a equação do plano tangente no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

Solução

1.º processo

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$$

$$\begin{cases} f(1, 1) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-6x}{2\sqrt{8 - 3x^2 - y^2}}; \text{ logo, } \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \dfrac{-3}{2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2y}{2\sqrt{8 - 3x^2 - y^2}}; \text{ logo, } \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$z - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$$

é a equação do plano tangente em $(1, 1, f(1, 1))$.

2.º processo

$$z = \sqrt{8 - 3x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 = 8 - 3x^2 - y^2$$

A função é então definida implicitamente pela equação

$$\underbrace{3x^2 + y^2 + z^2 - 8}_{F(x,\,y,\,z)} = 0$$

$\nabla F(1, 1, 2)$ é, então, normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

$$\nabla F(x, y, z) = (6x, 2y, 2z) \Rightarrow \nabla F(1, 1, 2) = (6, 2, 4).$$

A equação do plano tangente em $(1, 1, 2)$ é:

$$(6, 2, 4) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 2)] = 0$$

ou

$$6(x-1) + 2(y-1) + 4(z-2) = 0,$$

ou, ainda,

$$z - 2 = -\frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1).$$

EXEMPLO 3. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na intersecção das superfícies $x^2 + 2y^2 + z = 4$ e $x^2 + y + z = 3$. Suponha $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

a) Determine a reta tangente a γ no ponto $\gamma(t_0)$.
b) Determine uma curva $\gamma(t)$ nas condições acima.

Solução

a) Sejam $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z$ e $G(x, y, z) = x^2 + y + z$.
Para todo t no domínio de γ devemos ter

$$F(\gamma(t)) = 4 \quad \text{e} \quad G(\gamma(t)) = 3,$$

pois a imagem de γ está contida nas superfícies de nível $F(x, y, z) = 4$ e $G(x, y, z) = 3$. Segue que

$$\nabla F(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla G(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0,$$

ou seja, $\gamma'(t_0)$ é normal aos vetores $\nabla F(1, 1, 1)$ e $\nabla G(1, 1, 1)$; logo, $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao produto vetorial $\nabla F(1, 1, 1) \wedge \nabla G(1, 1, 1)$. Temos:

$$\nabla F(1, 1, 1) \wedge \nabla G(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{k}.$$

A equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ é:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(3, 0, -6), \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 4 \\ x^2 + y + z = 3 \end{cases}$

$x^2 + y + z = 3 \Rightarrow z = 3 - x^2 - y$. Substituindo na 1.ª equação vem:

$$x^2 + 2y^2 + 3 - x^2 - y = 4$$

e, portanto, $2y^2 - y - 1 = 0$, ou seja, $y = 1$ ou $y = -\frac{1}{2}$; isto é, y não depende de x. Como a curva deve passar pelo ponto $(1, 1, 1)$, vamos tomar $y = 1$. Segue que $z = 3 - x^2 - 1$, ou

seja, $z = 2 - x^2$. A imagem da curva $\gamma(t) = (t, 1, 2 - t^2)$ está contida na intersecção das superfícies e passa pelo ponto $(1, 1, 1)$. Sugerimos ao leitor desenhar a imagem de γ.

Exercícios 13.2

1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.
   a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$
   b) $2xyz = 3$ em $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$
   c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$

2. A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

3. Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

4. É dada uma função diferenciável $z = f(x, y)$ cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabe-se que $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $x^2 + 3y^2 - z^2 = 3$. Suponha $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

6. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na intersecção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 2$ com a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Suponha $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq 0$.
   a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma'(t_0)$.
   b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

7. É dada uma curva $\gamma(t)$ cuja imagem é a intersecção das superfícies $4x^2 + y^2 = 1$ e $x + y + z = 1$. Suponha $\gamma(t_0) = (0, 1, 0)$ e $\gamma'(t_0) \neq 0$.
   a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.
   b) Determine uma parametrização para a intersecção acima.

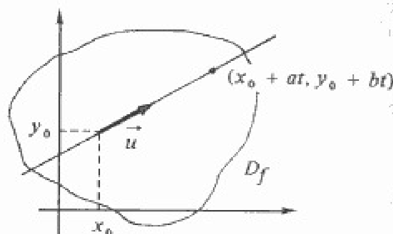
8. Considere a função $z = \frac{\sqrt[4]{8 + x^2 + y^2}}{y}$.
   a) Determine uma função $F(x, y, z)$, que *não envolva radicais*, tal que a função dada seja definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$.
   b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função dada no ponto $(2, 2, 1)$.

9. Determine a equação do plano normal, em $(1, 2, 3)$, à intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ e $xyz = 6$.

10. Determine um plano que passe pelos pontos (5, 0, 1) e (1, 0, 3) e que seja tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$.

13.3. Derivada Direcional

Sejam $z = f(x, y)$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de D_f e $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário. Suponhamos que exista $r > 0$ tal que para $|t| < r$ os pontos da reta $(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$ pertençam ao domínio de f. Como estamos supondo $\vec{u} = (a, b)$ unitário, a distância de $(x_0 + at, y_0 + bt)$ a (x_0, y_0) é $|t|$ (verifique).



Pois bem, definimos a *taxa média* de variação de f, na direção $\vec{u} = (a, b)$, entre os pontos (x_0, y_0) e $(x_0 + at, y_0 + bt)$ por

① $$\frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Vamos destacar, a seguir, o limite de ① para $t \to 0$.

Definição. O limite

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{u} = (a, b)$*, com $\vec{u}$ unitário.

A derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ denomina-se, também, *taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0) e na direção do vetor $\vec{u}$*. Observe:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) \cong \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for $|t|$.

As derivadas parciais de f, em (x_0, y_0), são particulares derivadas direcionais. De fato:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

e

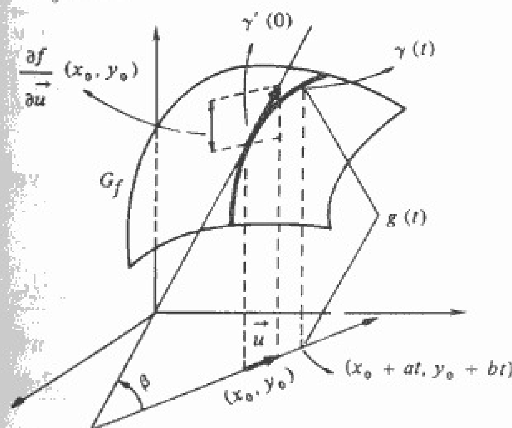
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Deste modo, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ são, respectivamente, as derivadas direcionais de f no ponto (x_0, y_0), e nas direções dos vetores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

A seguir, vamos interpretar geometricamente $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$. Para isto, consideremos a curva $\gamma(t)$ dada por

$$\gamma: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = g(t) \end{cases}$$

onde $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$.



Observe que a imagem de γ está contida no gráfico de f. Temos:

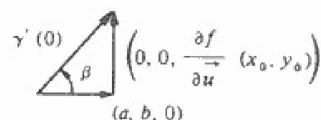
$$\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0),$$

ou seja,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0).$$

Segue que $\gamma'(0) = (a, b, g'(0)) = \left(a, b, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)\right)$. Então,

$$\gamma'(0) = (a, b, 0) + \left(0, 0, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)\right).$$



Como (a, b) é unitário, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$ (veja figura anterior).

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde $\vec{u}$ é o versor de

a) $\vec{v} = (-1, 1)$ *b)* $\vec{v} = (1, 2)$ *c)* $\vec{v} = (1, 1)$

Solução

Inicialmente, vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário qualquer.

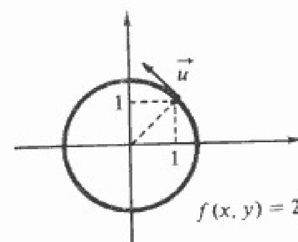
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + at, 1 + bt) - f(1, 1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1 + at)^2 + (1 + bt)^2 - 2}{t} = 2a + 2b.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2a + 2b.$$

a) $\vec{u} = \frac{(-1, 1)}{\|(-1, 1)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\vec{u}$ é tangente em $(1, 1)$ à curva de nível $f(x, y) = 2$ ou seja, $x^2 + y^2 = 2$ (verifique).



Portanto, é razoável esperar que, nesta direção t, a taxa de variação de f, em $(1, 1)$, seja nula. (Por quê?) De fato

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

b) $\vec{u} = \frac{(1, 2)}{\|(1, 2)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (a, b)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

c) $\vec{u} = \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; observe que $\vec{u}$ é o versor do vetor gradiente $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

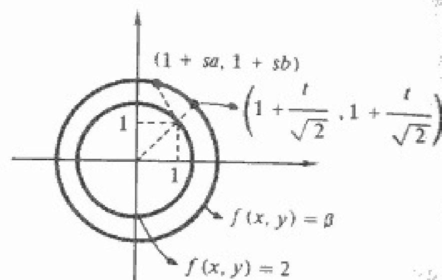
Note que o valor de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ para $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é maior que para $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Provaremos, na próxima seção que, sendo f diferenciável, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ assumirá valor máximo para $\vec{u}$ igual ao versor do vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

EXEMPLO 2. São dados uma função $f(x, y) = x^2 + y^2$, um vetor unitário (a, b) e um real $\beta > 2$. Suponha que $(1 + sa, 1 + sb)$ e $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$, com $s > 0$ e $t > 0$, pertençam

à curva de nível $f(x, y) = \beta$. Compare a taxa média de variação de f entre os pontos $(1, 1)$ e $(1 + sa, 1 + sb)$ e entre os pontos $(1, 1)$ e $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.

Solução



Sendo (a, b) unitário, a distância de $(1 + sa, 1 + sb)$ a $(1, 1)$ é s; a distância de $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ a $(1, 1)$ é t. Se $(a, b) \neq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, teremos $t < s$. Como $f(1 + sa, 1 + sb) = f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ resulta, para $(a, b) \neq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\frac{f(1 + sa, 1 + sb) - f(1, 1)}{s} < \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 1)}{t}.$$

É razoável, portanto, esperar que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ assuma valor máximo para $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

EXEMPLO 3. Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário dado. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solução

$$\frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} = \frac{\frac{a^3t^3}{(at)^2 + (bt)^2}}{t} = \frac{a^3}{\underbrace{a^2 + b^2}_{1}} = a^3,\ t \neq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} = a^3$$

ou seja, para todo vetor unitário (a, b)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = a^3.$$

Já vimos que f é contínua em $(0, 0)$, mas não diferenciável em $(0, 0)$. Este exemplo mostra-nos que *uma função pode ser contínua num ponto, ter derivada direcional em todas as direções neste ponto, e mesmo assim não ser diferenciável neste ponto.*

13.4. Derivada Direcional e Gradiente

O objetivo desta seção é destacar mais algumas propriedades do vetor gradiente. Inicialmente, vamos provar que se f for *diferenciável* em (x_0, y_0), então f admitirá derivada direcional em todas as direções, no ponto (x_0, y_0), e cada derivada direcional se exprime de modo bastante simples em termos do gradiente de f em (x_0, y_0).

> ***Teorema 1.*** Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, $(x_0, y_0) \in A$ e $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário. Se $f(x, y)$ for diferenciável em (x_0, y_0), então f admitirá derivada direcional em (x_0, y_0), na direção $\vec{u}$, e
>
> $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

Demonstração

Seja g dada por $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$; da diferenciabilidade da f em (x_0, y_0) segue a diferenciabilidade da g em $t = 0$ e, pela regra da cadeia,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, b = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (a, b)$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = g'(0)$$

resulta,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \quad ■$$

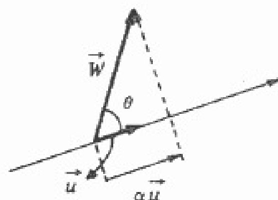
O teorema acima conta-nos que se $f(x, y)$ for *diferenciável* em (x_0, y_0), então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

Entretanto, se f *não* for diferenciável em (x_0, y_0) esta relação não tem nenhuma obrigação de se verificar. (Veja Exerc. 21.)

De agora em diante, quando nada for dito sobre uma função $f(x, y)$ ficará implícito que se trata de uma função definida num aberto e diferenciável.

Vimos na Seç. 6.4 que se $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são vetores não-nulos e θ o ângulo entre eles, então $\vec{w} \cdot \vec{u} = \|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \cos \theta$; se $\vec{u}$ for unitário, $\vec{w} \cdot \vec{u} = \|\vec{w}\| \cos \theta$. Na figura a seguir, $\alpha \vec{u}$ é a *projeção de* $\vec{w}$ *na direção* $\vec{u}$, onde $\alpha = \|\vec{w}\| \cos \theta$. Diremos que o número $\alpha = \|\vec{w}\| \cos \theta$ é a *componente escalar de* $\vec{w}$ *na direção* $\vec{u}$.

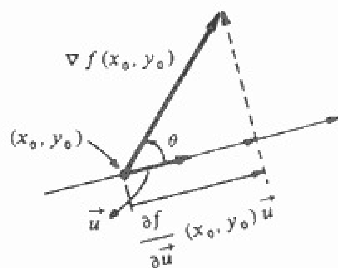


Veremos a seguir que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ *é a componente escalar de* $\nabla f(x_0, y_0)$ *na direção* $\vec{u}$.

Suponhamos $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ e $\vec{u}$ unitário. Seja θ o ângulo entre $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\vec{u}$. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \|\vec{u}\| \cos \theta.$$

Como $\vec{u}$ é unitário



$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta.$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ *é a componente escalar de* $\nabla f(x_0, y_0)$ *na direção* $\vec{u}$.

ATENÇÃO: $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ é número.

Teorema 2. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, diferenciável em (x_0, y_0) e tal que $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. Então, o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ ocorre quando $\vec{u}$ for o versor de $\nabla f(x_0, y_0)$, isto é, $\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$, e o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ é $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.

Demonstração

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ terá valor máximo para $\theta = 0$, ou seja, quando $\vec{u}$ for o versor de $\nabla f(x_0, y_0)$.

O valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ é então $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. ■

O teorema acima nos diz, ainda, que, *estando em* (x_0, y_0), *a direção e sentido que se deve tomar para que* f *cresça mais rapidamente é a do vetor* $\nabla f(x_0, y_0)$.

EXEMPLO 1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$, onde $f(x, y) = x^2 + xy$, e $\vec{u}$ o versor de

a) $\vec{v} = (1, 1)$

b) $\vec{w} = (3, 4)$

Solução

Como f é diferenciável

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \vec{u}.$$

$\nabla f(x, y) = (2x + y, x)$; logo, $\nabla f(1, 2) = (4, 1)$.

a) $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (4, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

b) $\vec{u} = \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (4, 1) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5}.$$

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = x^2y$.

a) Determine $\vec{u}$ de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ seja máximo.

b) Qual o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$?

c) Estando-se em (1, 1), que direção e sentido deve-se tomar para que f cresça mais rapidamente?

Solução

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)\right) = (2, 1).$$

a) Como f é diferenciável em (1, 1) e $\nabla f(1, 1) \neq (0, 0)$, segue que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é máximo para $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|}$, ou seja, $\vec{u} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

b) O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é $\|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{5}$.

c) $\nabla f(1, 1) = (2, 1)$ aponta a direção e sentido em que f cresce mais rapidamente em (1, 1).

EXEMPLO 3. Admita que $T(x, y) = x^2 + 3y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy: $T(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y) (supondo T em °C, x e y em cm).

a) Estando-se em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, qual a direção e sentido de maior crescimento da temperatura? Qual a taxa de crescimento nesta direção?

b) Estando-se em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, qual a direção e sentido de maior decrescimento da temperatura? Qual a taxa de decrescimento nesta direção?

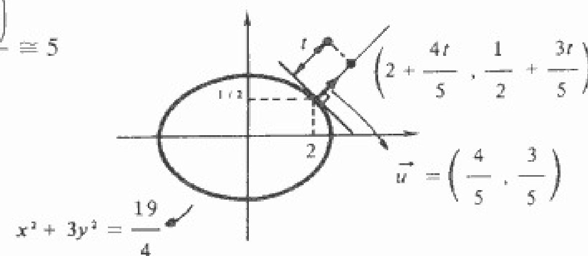
Solução

a) $\nabla T\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = (4, 3) = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ aponta, em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, a direção e sentido de maior crescimento de temperatura. Nesta direção, $\vec{u} = \dfrac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\|}$, a taxa de variação da temperatura é máxima:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\| = 5 \text{ (°C/cm)},$$

o que significa que, a partir do ponto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ e na direção e sentido de $\nabla T\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, a temperatura está aumentando a uma taxa aproximada de 5°C por cm:

$$\frac{T\left(2 + \frac{4t}{5}, \frac{1}{2} + \frac{3t}{5}\right) - T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{t} \cong 5$$



sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for o t.

b) $-\nabla T\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = -(4\vec{i} + 3\vec{j})$ aponta, em $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, a direção e sentido de maior decrescimento da temperatura. Nesta direção, $\vec{u} = -\dfrac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\|}$, a taxa de variação da temperatura é mínima:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}\left(2, \frac{1}{2}\right) = \nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\|}\right) = -\left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\|$$

ou seja,

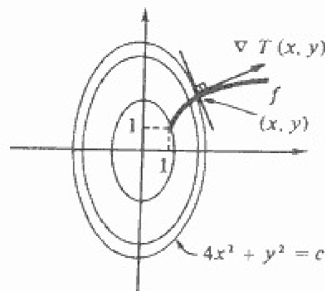
$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}\left(2, \frac{1}{2}\right) = -5 \text{ (°C/cm)}.$$

Nesta direção e sentido, a partir de $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, a temperatura está decrescendo a uma taxa aproximada de 5°C por cm.

EXEMPLO 4. Suponha que $T(x, y) = 4x^2 + y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir de (1, 1), sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

Solução

Por considerações geométricas, é razoável esperar que a trajetória descrita por P coincida com o gráfico de uma função $y = f(x)$, com $f(1) = 1$.



O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em (x, y) é $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Como $\nabla T(x, y) = (8x, 2y)$ deve ser tangente ao gráfico de f, em (x, y), devemos ter

① $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{8x}.$$

(Observe que a direção do vetor $\nabla T(x, y) = 8x\vec{i} + 2y\vec{j}$ tem coeficiente angular $\frac{2y}{8x}$.)

Separando as variáveis em ① e integrando, obtemos,

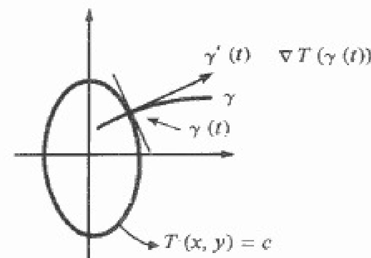
$$\ln y = \frac{1}{4}\ln x + k \quad \left(\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{4x}\,dx\right).$$

Para que a condição $f(1) = 1$ seja satisfeita, devemos tomar $k = 0$; assim,

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln x \quad \text{ou} \quad y = \sqrt[4]{x}.$$

Segue que $\gamma(t) = (t, \sqrt[4]{t})$, $t \geq 1$, é uma parametrização para a trajetória descrita por P. Um outro modo de resolver o problema é determinar funções $x(t)$ e $y(t)$ tais que a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfaça as condições

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (1, 1). \end{cases}$$



Temos:

$$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \Leftrightarrow (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (8x(t), 2y(t)).$$

Deste modo, $x(t)$ e $y(t)$ devem satisfazer as condições

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x \\ \dot{y} = 2y \\ x(0) = 1 \text{ e } y(0) = 1. \end{cases}$$

Deixamos a seu cargo verificar que $x = e^{8t}$ e $y = e^{2t}$ satisfazem as condições acima. Assim,

$$\gamma(t) = (e^{8t}, e^{2t}),\ t \geq 0,$$

é, também, parametrização da trajetória descrita por P.

EXEMPLO 5. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto (1, 2) e na direção do vetor $2\vec{i} - \vec{j}$.

Solução

O que queremos aqui é $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $2\vec{i} - \vec{j}$.

$$\nabla f(1, 2) = (2, 4) \quad \text{e} \quad \vec{u} = \frac{(2, -1)}{\|(2, -1)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = (2, 4) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

Observação. Tudo o que dissemos nesta seção generaliza-se para funções reais de três ou mais variáveis.

EXEMPLO 6. Calcule a derivada direcional de $f(x, y, z) = xyz$ no ponto $(1, 1, 3)$ e na direção $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 3) = \nabla f(1, 1, 3) \cdot \vec{u}$$

onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

$$\vec{u} = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{e} \quad \nabla f(1, 1, 3) = (3, 3, 1)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 3) = (3, 3, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Exercícios 13.4

1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, sendo dados:

a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ e $\vec{u}$ o versor de $2\vec{i} + \vec{j}$.

b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{u}$ o versor de $(3, 4)$.

c) $f(x, y) = \text{arc tg } \frac{x}{y}$, $(x_0, y_0) = (3, 3)$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

d) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ e $\vec{u}$ o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

2. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$.

b) $f(x, y) = \ln \|(x, y)\|$ em $(1, -1)$.

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

3. Seja $f(x, y) = x \text{ arc tg } \frac{x}{y}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, onde $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f, no ponto $(1, 1)$.

4. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ no ponto $(2, 2)$ e na direção

a) $\vec{v} = (1, 2)$ *b)* $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

5. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$, no ponto $(-1, 1)$ e na direção $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

6. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $(1, 1)$, derivada direcional igual a 3 na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a -1 na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcule

a) $\nabla f(1, 1)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

7. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

8. Seja $f(x, y) = xy$. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento de f.

9. Seja $f(x, y) = xy$. Determine a reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1, 2, f(1, 2))$, que forma com o plano xy ângulo máximo.

10. Seja $f(x, y) = x + 2y + 1$. Determine a reta contida no gráfico de f, passando pelo ponto $(1, 1, 4)$ e que forma com o plano xy ângulo máximo.

11. Um ponto P descreve uma trajetória sobre o gráfico de $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Sabe-se que a reta tangente em cada ponto da trajetória forma com o plano xy ângulo máximo. Determine uma parametrização para a trajetória admitindo que ela passe pelo ponto $(1, 1, 5)$.

12. Admita que o gráfico de $z = xy$ represente uma superfície própria para a prática do esqui. Admita, ainda, que um esquiador deslize pela superfície sempre na direção de maior declive. Se ele parte do ponto $(1, 2, 2)$, em que ponto ele tocará o plano xy?

13. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 5 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$. Suponha que o gráfico de $z = 5 - x^2 - 4y^2$, $(x, y) \in A$, represente a superfície de um monte. (Adote o km como unidade de medida.) Um alpinista que se encontra na posição (1, 1, 0) pretende escalá-lo. Determine a trajetória a ser descrita pelo alpinista admitindo que ele busque sempre a direção de maior aclive. Sugerimos ao leitor desenhar o monte e a trajetória a ser descrita pelo alpinista.

14. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em °C.) Um indivíduo encontra-se na posição (3, 2) e pretende dar um passeio.

   a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto (3, 2).
   b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
   c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0,01 km na direção encontrada no item *b*?
   d) De quanto decrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe 0,01 km na direção $\vec{j}$?

15. Calcule a derivada direcional da função dada, no ponto e direção $\vec{w}$ indicados.

   a) $f(x, y, z) = xyz$ em (1, 1, 1) e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
   b) $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$ em (1, 2, −1) e na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

16. A função diferenciável $f(x, y, z)$ tem, no ponto (1, 1, 1), derivada direcional igual a 1 na direção $4\vec{j} + 3\vec{k}$, igual a 2 na direção $-4\vec{i} + 3\vec{j}$ e igual a zero na direção $\vec{j}$. Calcule o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 1)$.

17. Seja $f(x, y)$ diferenciável e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$, unitários e ortogonais. Prove:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\,\vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\,\vec{v}.$$

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) \text{ e } \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) \text{ são os componentes de } \nabla f(x, y) \text{ em relação à base } (\vec{u}, \vec{v})\right)$

18. Seja $g(r, \theta) = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^2$. Sejam $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$. Mostre que

   a) $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ e $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$.

   b) $\nabla f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)\,\vec{u} + \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)\,\vec{v}$.

   c) $\| \nabla f(x, y) \|^2 = \left[\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)\right]^2 + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)\right]^2$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$.

19. Calcule $\| \nabla f(1, 1) \|$ sendo $f(x, y) = \left[\operatorname{arc\,sen} \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]^4$.

(*Sugestão*. Faça $g(r, \theta) = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ e utilize o item *c*) do exercício anterior.)

20. Suponha $f(x, y)$ diferenciável no aberto A. Sejam (s, t) as coordenadas do vetor (x, y) em relação à base $(\vec{u}, \vec{v})$, onde $\vec{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $\vec{v} = (-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$. Considere a função g dada por $g(s, t) = f(x, y)$. Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) \text{ e } \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y).$$

Interprete.

21. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}, \text{ onde } \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \text{ Explique.}$$

22. Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A de $\mathbb{R}^2$ e sejam $\gamma(t)$ e $\delta(t)$ duas curvas definidas e diferenciáveis num intervalo aberto I e com imagens contidas em A. Suponha $\gamma(t_0) = \delta(t_0)$, $\| \gamma'(t_0) \| = 1$, $\| \delta'(t_0) \| = 1$, $\nabla f(\gamma(t_0)) \neq \vec{0}$ e $\gamma'(t_0)$ o versor de $\nabla f(\gamma(t_0))$. Suponha, ainda, que $\gamma'(t_0)$ não seja paralelo a $\delta'(t_0)$. Prove que existe $r > 0$ tal que

$$f(\gamma(t)) > f(\delta(t)) \text{ para } t_0 < t < t_0 + r$$

e

$$f(\gamma(t)) < f(\delta(t)) \text{ para } t_0 - r < t < t_0.$$

Interprete.

23. Seja $f(x, y, z)$ diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^3$ e sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do $\mathbb{R}^3$, unitários e dois a dois ortogonais. Prove:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y, z)\,\vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y, z)\,\vec{v} + \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x, y, z)\,\vec{w}.$$

24. Seja $F(r, \theta, z) = f(x, y, z)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, onde f é suposta diferenciável num aberto do $\mathbb{R}^3$. Prove que

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, z)\,\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, z)\,\vec{v} + \frac{\partial F}{\partial z}(r, \theta, z)\,\vec{k}$$

onde $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\,\theta\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\text{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.

25. Seja $F(r, \theta, \varphi) = f(x, y, z)$, com $x = r\,\text{sen}\,\varphi \cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta$ e $z = r\cos\varphi$, onde f é suposta diferenciável num aberto de $\mathbb{R}^3$. Prove que

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, \varphi)\,\vec{u} + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\varphi}\,\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi)\,\vec{v} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi)\,\vec{w}$$

onde $\vec{u} = (\text{sen}\,\varphi\cos\theta, \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta, \cos\varphi)$, $\vec{v} = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$ e $\vec{w} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\,\text{sen}\,\theta, -\text{sen}\,\varphi)$.

14

Derivadas Parciais de Ordens Superiores

14.1. Derivadas Parciais de Ordens Superiores

Seja a função $z = f(x, y)$; na Seç. 10.1 vimos como construir as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Da mesma forma, podemos, agora, construir as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right),\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) \text{ etc.}$$

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 4x^5y^4 - 6x^2y + 3$. Calcule todas as derivadas parciais de 2.ª ordem.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 20x^4y^4 - 12xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 16x^5y^3 - 6x^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^3y^4 - 12y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^4y^3 - 12x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(16x^5y^3 - 6x^2) = 48x^5y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(16x^5y^3 - 6x^2) = 80x^4y^3 - 12x.$$

Note que, neste exemplo, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Mostre que

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0) = 0$ *b)* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0) = 1$

Solução

a) Devemos, primeiro, determinar $\frac{\partial f}{\partial y}$. Para $(x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3xy^2\,(x^2 + y^2) - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em $(0, 0)$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0. \text{ Assim,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Temos, agora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = 0 \text{ ou seja, } \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0) = 0.$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3\,(x^2 + y^2) - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ (verifique).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = 1 \text{ ou seja, } \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0) = 1.$$

O exemplo anterior mostra-nos que a igualdade $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)$ nem sempre se verifica. O próximo teorema, cuja demonstração é deixada para exercício (veja exercício

15), fornece-nos uma *condição suficiente* para que tal igualdade ocorra. Antes de enunciar tal teorema, vamos definir função de classe C^n.

Uma função $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, é dita de *classe* C^n em A se f admitir todas as derivadas parciais de ordem n contínuas em A.

O teorema que enunciaremos a seguir conta-nos que se f for de classe C^2 em A, A aberto, então as derivadas parciais *mistas* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ serão iguais em A.

Teorema *(de Schwarz)*. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto. Se f for de classe C^2 em A,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in A$.

Exercícios 14.1

1. Calcule todas as derivadas parciais de 2.ª ordem.

a) $f(x, y) = x^3y^2$ *b)* $z = e^{x^2 - y^2}$

c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ *d)* $g(x, y) = 4x^3y^4 + y^3$

2. Seja $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$. Verifique que

a) $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y) = -3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2)^2}$

3. Verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, onde $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

4. Verifique que $x\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, onde $z = (x + y)\, e^{\frac{x}{y}}$.

5. Sejam $f, g: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, duas funções de classe C^2 e tais que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Prove que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

6. Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto A. Justifique as igualdades.

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ *b)* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}$ *c)* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}$

7. Seja $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

8. Seja $f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

9. Seja $u(x, t) = A \operatorname{sen}(a\lambda t + \varphi) \operatorname{sen} \lambda x$, com A, a, λ e φ constantes. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

10. Seja $u = f(x - at) + g(x + at)$, onde f e g são duas funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até a 2.ª ordem. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

11. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ duas funções que admitem derivadas parciais num mesmo aberto A. Suponha que $(1, 1) \in A$ e que $x(1, 1) > 0$. Suponha, ainda, que para todo $(u, v) \in A$

$$x^3 + y^3 = u - v \text{ e } xy = u - 2v.$$

Calcule $\left.\dfrac{\partial x}{\partial u}\right|_{\substack{u = 1 \\ v = 1}}$

12. Seja $z = xye^{\frac{x}{y}}$. Verifique que

$$x \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + y \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 0.$$

13. Seja $z = f(x, y)$ de classe C^2 no aberto A e seja $(x_0, y_0) \in A$. Suponha que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in A$. Prove que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Interprete graficamente.

14. Seja $z = \displaystyle\int_1^{x^2 - y^2} \left[\int_0^u \operatorname{sen} t^2 \, dt\right] du$. Calcule

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *b)* $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x = 1 \\ y = 1}}$

15. Seja $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$, com A aberto. Suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ estão definidas em A e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ são contínuas em A. Seja (x_0, y_0) um ponto qualquer de A; seja B uma bola aberta de centro (x_0, y_0) e contida em A. Sejam h e k tais que $(x_0 + h, y_0 + k)$ pertença a B. Seja, ainda,

$$H(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

a) Considere as funções $\varphi(t) = f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$ e $\rho(s) = f(x_0 + h, s) - f(x_0, s)$. Mostre que

$$H(h, k) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \rho(y_0 + k) - \rho(y_0).$$

b) Prove: existe t_1 entre x_0 e $x_0 + h$ tal que

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(t_1) h = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0)\right] h.$$

c) Prove: existem t_1 e s_1, com t_1 entre x_0 e $x_0 + h$ e s_1 entre y_0 e $y_0 + k$, tais que

$$H(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t_1, s_1) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

d) Prove: existem t_2 e s_2, com t_2 entre x_0 e $x_0 + h$ e s_2 entre y_0 e $y_0 + k$, tais que

$$H(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t_2, s_2) = \rho(y_0 + k) - \rho(y_0).$$

e) Prove: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Observação. A razão de considerarmos a expressão $H(h, k)$ é a seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk}\right].$$

14.2. Aplicações da Regra da Cadeia Envolvendo Derivadas Parciais de Ordens Superiores

Sejam $f(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ diferenciáveis. Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt}[f(x, y)] = \nabla f(x, y) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

Suponhamos, agora, que as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, sejam também diferenciáveis. O gradiente de $\frac{\partial f}{\partial x}$ em (x, y) é:

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\right)$$

ou seja,

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)\right).$$

Temos, então, pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = \nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\frac{dy}{dt}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

Da mesma forma,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)\frac{dy}{dt}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

EXEMPLO 1. Suponha $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto do $\mathbb{R}^2$. Seja $g(t) = f(3t, 2t + 1)$. Expresse $g''(t)$ em termos de derivadas parciais de f.

Solução

$$g(t) = f(x, y),\ x = 3t \text{ e } y = 2t + 1.$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dt}$$

ou seja,

$$g'(t) = 3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Então,

① $$g''(t) = 3\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] + 2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right].$$

Temos:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)\frac{dy}{dt}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

Substituindo em ① $\left(\text{lembrando que } \frac{dx}{dt} = 3 \text{ e } \frac{dy}{dt} = 2\right)$ vem:

$$g''(t) = 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 6\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y) + 6\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Como f é de classe C^2, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$. Logo,

$$g''(t) = 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 12\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

onde $x = 3t$ e $y = 2t + 1$.

EXEMPLO 2. Sejam $f(x, y) = x^5y^4$, $x = 3t$ e $y = 2t + 1$. Calcule $g''(t)$, sendo $g(t) = f(3t, 2t + 1)$.

Solução

1.° processo (pela regra da cadeia)

$$g(t) = f(x, y),\ x = 3t \text{ e } y = 2t + 1.$$

Pelo exemplo anterior

$$g''(t) = 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 12\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

onde $x = 3t$ e $y = 2t + 1$. Tendo em vista que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 20x^3y^4, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = 20x^4y^3 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12x^5y^2$$

resulta,

$$g''(t) = 180x^3y^4 + 240x^4y^3 + 48x^5y^2$$

e, portanto,

$$g''(t) = 180\,(3t)^3\,(2t + 1)^4 + 240\,(3t)^4\,(2t + 1)^3 + 48\,(3t)^5\,(2t + 1)^2.$$

2.° processo

$$g(t) = (3t)^5\,(2t + 1)^4.$$

$$g'(t) = 15\,(3t)^4\,(2t + 1)^4 + 8\,(3t)^5\,(2t + 1)^3.$$

Portanto,

$$g''(t) = 180\,(3t)^3\,(2t + 1)^4 + 120\,(3t)^4\,(2t + 1)^3 + 120\,(3t)^4\,(2t + 1)^3 + 48\,(3t)^5\,(2t + 1)^2$$

ou seja,

$$g''(t) = 180\,(3t)^3\,(2t + 1)^4 + 240\,(3t)^4\,(2t + 1)^3 + 48\,(3t)^5\,(2t + 1)^2.$$

EXEMPLO 3. Suponha $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$. Seja g dada por

$$g(t) = t^2\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

onde $x = t^2$ e $y = t^3$. Expresse $g'(t)$ em termos de derivadas parciais de f.

Solução

Pela regra de derivação de um produto, temos:

$$g'(t) = 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + t^2\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right].$$

Como

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y)\,\frac{dy}{dt}$$

$$= 2t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 3t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y)$$

resulta,

$$g'(t) = 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2t^3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 3t^4\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y).$$

EXEMPLO 4. Seja $z = f(x, x^2)$ onde $f(x, y)$ é de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$. Expresse $\frac{d^2z}{dx^2}$ em termos de derivadas parciais de f.

Solução

$$z = f(x, y), \text{ onde } y = x^2.$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\frac{dy}{dx}$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Segue que,

① $$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] + \frac{d}{dx}\left[2x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right].$$

Temos:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\frac{dy}{dx}$$

ou seja,

② $$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2x\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y).$$

Temos, também:

$$\frac{d}{dx}\left[2x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 2x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) =$$

$$= 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 2x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) + 2x\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right]$$

ou seja,

③ $$\frac{d}{dx}\left[2x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 2x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) + 4x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Substituindo ② e ③ em ① e lembrando que f é de classe C^2, resulta:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 4x \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

EXEMPLO 5. Seja $z = f(u - 2v, v + 2u)$ onde $f(x, y)$ é de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$. Expresse $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ em termos de derivadas parciais de f.

Solução

$$z = f(x, y),\ x = u - 2v \text{ e } y = v + 2u.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial y}{\partial u}$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Segue que,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] + 2\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right].$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)\frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

resulta

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

EXEMPLO 6. Mostre que a mudança de variáveis $x = e^u$ e $y = e^v$ transforma a equação

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

em

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1.$$

Solução

$$z = z(x, y),\ x = e^u \text{ e } y = e^v.$$

Temos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

ou seja,

① $$\frac{\partial z}{\partial u} = e^u\frac{\partial z}{\partial x}.$$

ABUSOS DE NOTAÇÃO. Aqui $\frac{\partial z}{\partial x}$ deve ser olhado como função de x e y, enquanto $\frac{\partial z}{\partial u}$ deve ser olhado como função de u e v.

Segue de ① que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u\frac{\partial z}{\partial x} + e^u\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right].$$

Tendo em vista que

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = e^u\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

resulta

② $$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u\frac{\partial z}{\partial x} + e^{2u}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Procedendo de forma análoga obtém-se

③ $$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = e^v\frac{\partial z}{\partial y} + e^{2v}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Somando-se ② e ③ resulta

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = e^{2u}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^{2v}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e^u\frac{\partial z}{\partial x} + e^v\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Exercícios 14.2

(Quando nada for dito sobre uma função, ficará subentendido que se trata de uma função de classe C^2 num aberto.)

1. Expresse $g'(t)$ em termos de derivadas parciais de f, sendo g dada por

   a) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $x = t^2$ e $y = \text{sen } t$.

   b) $g(t) = t^3 \dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)$.

   c) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 5 \dfrac{\partial f}{\partial y}(\text{sen } 3t, t)$.

2. Expresse $g''(t)$ em termos de derivadas parciais de f, sendo $g(t) = f(5t, 4t)$.

3. Considere a função $g(t) = f(a + ht, b + kt)$, com a, b, h e k constantes.

   a) Supondo $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$, verifique que

$$g''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(x, y) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

   onde $x = a + ht$ e $y = b + kt$.

   b) Supondo $f(x, y)$ de classe C^3 num aberto de $\mathbb{R}^2$, verifique que

$$g'''(t) = h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) + 3h^2k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \, \partial y}(x, y) + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y^2}(x, y) + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)$$

   onde $x = a + ht$ e $y = b + kt$.

4. Considere a função $h(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, onde $f(u, v)$ é suposta de classe C^2. Verifique que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = 2\left[\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right] + 4x^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, v) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \, \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v)\right]$$

   onde $u = x^2 + y^2$ e $v = x^2 - y^2$.

5. Considere a função $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \text{sen } 3x)$. Verifique que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \text{sen } 3x) + 3 \cos 3x \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(x, \text{sen } 3x).$$

6. Considere a função $z = x \dfrac{\partial f}{\partial y}(2x, x^3)$. Verifique que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}(2x, x^3) + x\left[2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(2x, x^3) + 3x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2x, x^3)\right].$$

7. Seja $g(u, v) = f(2u + v, u - 2v)$, onde $f(x, y)$ é suposta de classe C^2. Verifique que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 5 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

8. Seja $v(r, \theta) = u(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \text{ sen } \theta$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

9. Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$, $g(x)$ derivável até a 2.ª ordem num intervalo aberto I e tais que, para todo $x \in I$, $f(x, g(x)) = 0$ (isto é, $y = g(x)$ é dada implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$). Expresse $g''(x)$ em termos de derivadas parciais de f.

10. Suponha que $f(x, t)$ satisfaça a equação

$$① \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

   a) Verifique que $g(u, v) = f(x, t)$, onde $x = u + v$ e $t = u - v$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \, \partial u} = 0$.

   b) Determine uma coleção de funções $f(x, t)$ que satisfaçam ①.

11. Suponha que $f(x, t)$ satisfaça a equação

$$② \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (c \neq 0 \text{ constante}).$$

   a) Determine constantes m, n, p e q para que $g(u, v) = f(x, t)$, onde $x = mu + nv$ e $t = pu + qv$ satisfaça a equação $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \, \partial v} = 0$.

   b) Determine uma família de soluções de ②.

12. Seja $F(r, \theta, t) = f(x, y, t)$ onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \text{ sen } \theta$. Suponha que ($c \neq 0$ constante)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right].$$

   Mostre que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right].$$

13. Sejam $z = z(x, y)$, $x = e^u \cos v$ e $y = e^u \text{ sen } v$. Suponha que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Calcule

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

14. Sejam $G(u, v) = \dfrac{F(x, y)}{x}$, $u = x + y$ e $v = \dfrac{y}{x}$. Suponha que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$. Calcule $\dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2}$.

15. *a*) Ache uma função $u(x, y)$ da forma $u(x, y) = F(x^2 + y^2)$ que satisfaça a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

b) Faça a mesma coisa para funções de três ou mais variáveis.

16. Verifique que a mudança de variáveis $x = s \cos \theta - t \operatorname{sen} \theta$ e $y = s \operatorname{sen} \theta + t \cos \theta$ com θ constante, transforma a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ (u = u(x, y))$$

em

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ (u = u(s, t)).$$

17. Verifique que a mudança de variáveis $u = x + y$ e $v = y + 2x$ transforma a equação

③ $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

em

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

Determine, então, uma coleção de soluções de ③.

18. Suponha que $z = z(x, y)$ satisfaça a equação

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} = x^3 y^2.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = e^u$ e $y = e^v$, calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} - 2\frac{\partial z}{\partial u}$.

15

TEOREMA DO VALOR MÉDIO. FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

15.1. TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Um dos teoremas centrais do cálculo de funções reais de uma variável real é o teorema do valor médio (TVM). Nesta seção, vamos estendê-lo para o caso de funções reais de duas variáveis reais e deixaremos a cargo do leitor a tarefa de generalizá-lo para funções reais de três ou mais variáveis reais.

Antes de enunciar e demonstrar tal teorema, vamos introduzir os conceitos de *segmento* e *poligonal*. Sejam P_0 e P_1 dois pontos do $\mathbb{R}^2$; o conjunto

$$P_0P_1 = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid P = P_0 + \lambda(P_1 - P_0), \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

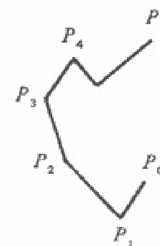
denomina-se *segmento* de extremidades P_0 e P_1. Sejam, agora, $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, $n + 1$ pontos distintos do $\mathbb{R}^2$; o conjunto

$$P_0P_1 \cup P_1P_2 \cup \ldots \cup P_{n-1}P_n$$

denomina-se *poligonal* de vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$.



segmento de extremidades P_0 e P_1



poligonal de vértices P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5

Teorema (*do valor médio*). Sejam A um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$, P_0 e P_1 dois pontos de A tais que o segmento P_0P_1 esteja contido em A. Nestas condições, se $f(x, y)$ for diferenciável em A, então existirá pelo menos um ponto $\overline{P}$ interno ao segmento P_0P_1 (isto é, $\overline{P}$ pertence a P_0P_1 mas não é extremidade) tal que

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\overline{P}) \cdot (P_1 - P_0).$$

Demonstração

Consideremos a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f(P_0 + t(P_1 - P_0)),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Esta função g fornece os valores que f assume nos pontos do segmento P_0P_1. Da diferenciabilidade de f em A, segue que g é contínua em $[0, 1]$ e derivável em $]0, 1[$. Pelo TVM existe $\bar{t}$ em $]0, 1[$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\bar{t}).(1 - 0),$$

ou seja,

$$g(1) - g(0) = g'(\bar{t}).$$

Como $g(1) = f(P_1)$ e $g(0) = f(P_0)$, resulta

$$f(P_1) - f(P_0) = g'(\bar{t}).$$

Pela regra da cadeia

$$g'(t) = \nabla f(P_0 + t(P_1 - P_0)) \cdot \gamma'(t)$$

onde $\gamma(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$. Temos

$$\gamma(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) \Rightarrow \gamma'(t) = P_1 - P_0.$$

Assim,

$$g'(\bar{t}) = \nabla f(P_0 + \bar{t}(P_1 - P_0)) \cdot (P_1 - P_0)$$

onde $\overline{P} = P_0 + \bar{t}(P_1 - P_0)$ é um ponto interno ao segmento P_0P_1 pois $0 < \bar{t} < 1$. Portanto,

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\overline{P}) \cdot (P_1 - P_0). \quad \blacksquare$$

Pelo TVM existe $\overline{P}$ interno ao segmento P_0P_1 tal que

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\overline{P}) \cdot (P_1 - P_0) = \nabla f(\overline{P}) \cdot \frac{P_1 - P_0}{\| P_1 - P_0 \|} \| P_1 - P_0 \|.$$

Fazendo $\vec{u} = \dfrac{P_1 - P_0}{\| P_1 - P_0 \|}$ resulta,

$$f(P_1) - f(P_0) = (\nabla f(\overline{P}) \cdot \vec{u}) \|P_1 - P_0\|$$

ou seja,

$$f(P_1) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\overline{P}) \| P_1 - P_0 \|$$

ou ainda,

$$\boxed{\frac{f(P_1) - f(P_0)}{\| P_1 - P_0 \|} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\overline{P}).} \qquad (P_1 \neq P_0)$$

Assim, *se $f(x, y)$ for diferenciável no aberto A e se $P_0P_1 \subset A$, então existirá $\overline{P}$ interno a P_0P_1 tal que a derivada direcional de f, em $\overline{P}$, e na direção $\vec{u} = \dfrac{P_1 - P_0}{\| P_1 - P_0 \|}$, é a taxa média de variação de f entre os pontos P_0 e P_1, $P_0 \neq P_1$.*

Observação. O enunciado do TVM para função real de n variáveis ($n > 2$) é o acima, substituindo $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}^n$.

Exercícios 15.1

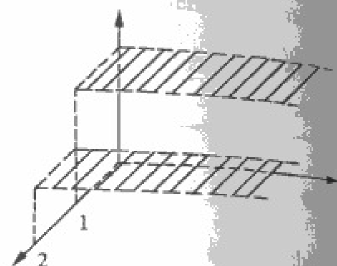
1. Determine $\overline{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ como no teorema do valor médio, sendo dados:
   a) $f(x, y) = 2x^2 + 3y$, $P_0 = (1, 1)$ e $P_1 = (2, 3)$.
   b) $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + xy$, $P_0 = (1, 2)$ e $P_1 = (4, 3)$.
   c) $f(x, y) = x^3 + xy^2$, $P_0 = (1, 1)$ e $P_1 = (2, 2)$.
2. Seja $f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $\|\nabla f(x, y)\| \leq M$, para todo (x, y). Prove que
   $$|f(x, y) - f(s, t)| \leq M \| (x, y) - (s, t) \|$$
   quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) em $\mathbb{R}^2$.
3. Seja $f(x, y) = \ln(x + y)$. Prove que
   $$|f(x, y) - f(s, t)| \leq \| (x, y) - (s, t) \|$$
   quaisquer que sejam (x, y) e (s, t), com $x > 1$, $y > 1$, $s > 1$ e $t > 1$.

15.2. Funções com Gradiente Nulo

Estamos interessados, agora, em estudar as funções que têm gradiente nulo num aberto. Se $f(x, y)$ for constante num aberto A de $\mathbb{R}^2$, então $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ para todo $(x, y) \in A$.

Entretanto, pode acontecer de uma função ter gradiente nulo em todos os pontos de um aberto sem ser constante neste aberto: a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } y > 0 \text{ e } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } y > 0 \text{ e } 1 < x < 2 \end{cases}$$

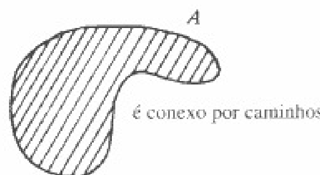


tem gradiente nulo no aberto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$, mas não é constante em A.

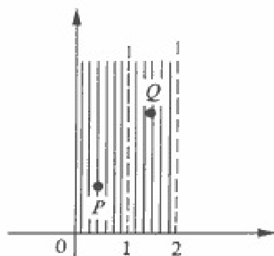
Provaremos a seguir que se uma função admitir gradiente nulo em todos os pontos de um conjunto A *conexo por caminhos*, então a função será necessariamente constante em A. Dizemos que um conjunto *aberto A* é *conexo por caminhos* se, quaisquer que forem os pontos P e Q pertencentes a A, existir uma poligonal, de extremidades P e Q, contida em A.

EXEMPLOS

a) $A = \mathbb{R}^2$ é conexo por caminhos.
b) Toda bola aberta é conexo por caminhos.
c)



d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$ não é conexo por caminhos.

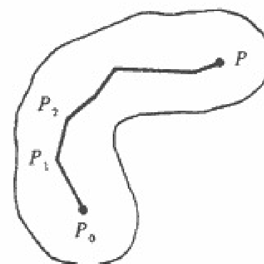


Qualquer poligonal ligando P a Q tem pontos que não pertencem a A. (Observe que os pontos $(1, y)$, $y > 0$, não pertencem a A.)

Teorema. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e *conexo por caminhos*. Nestas condições, se $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ para todo (x, y) em A, então f será constante em A.

Demonstração

Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de A; vamos provar que para todo $P = (x, y) \in A$, $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Como A é conexo por caminhos, existem pontos $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ e $P_n = P$ pertencentes a A tais que a poligonal $P_0P_1 \cup P_1P_2 \cup \ldots \cup P_{n-1}P_n$ está contida em A.



Pelo teorema do valor médio, para todo i existe $\overline{P}_i$ interno a $P_{i-1}P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tal que

$$f(P_i) - f(P_{i-1}) = \nabla f(\overline{P}_i) \cdot (P_i - P_{i-1})$$

e como $\nabla f(\overline{P}_i) = 0$ (hipótese) resulta

$$f(P_i) = f(P_{i-1})$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$; assim,

$$f(P_0) = f(P_1) = f(P_2) = \ldots = f(P_n) = f(P)$$

e, portanto, $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Fica provado assim que, para todo $(x, y) \in A$, $f(x, y) = f(x_0, y_0)$, ou seja, f é constante em A. ■

15.3. Relação entre Funções com Mesmo Gradiente

Teorema 1. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e *conexo por caminhos* e sejam f, g duas funções que admitem derivadas parciais em A. Nestas condições, se $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ para todo $(x, y) \in A$, então existirá uma constante k tal que

$$g(x, y) = f(x, y) + k$$

para todo (x, y) em A.

Demonstração

Seja $h(x, y) = g(x, y) - f(x, y)$, $(x, y) \in A$; como

$$\nabla h(x, y) = \nabla g(x, y) - \nabla f(x, y),\ (x, y) \in A,$$

segue da hipótese que $\nabla h(x, y) = (0, 0)$ para todo $(x, y) \in A$. Como A é conexo por caminhos, resulta que h é constante em A; logo, existe uma constante k tal que $h(x, y) = k$ em A, ou seja,

$$g(x, y) = f(x, y) + k$$

para todo $(x, y) \in A$. ■

O teorema acima nos diz que *duas funções com gradientes iguais num conjunto conexo por caminhos diferem, neste conjunto, por uma constante.*

EXEMPLO 1. Determine todas as funções $f(x, y)$, definidas em $\mathbb{R}^2$, tais que

① $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + y^2 \end{cases}$$

Solução

Observe que duas funções que satisfazem ① terão gradientes iguais; logo, deverão diferir por constante, pois $\mathbb{R}^2$ é conexo por caminhos. Basta, então, determinar uma solução de ① e qualquer outra será esta mais uma constante. A função

$$x^3y^2 + 4x$$

satisfaz a 1.ª equação (obtém-se tal função integrando-se a 1.ª equação de ① em relação a x, mantendo-se y constante). Por outro lado,

$$x^3y^2 + \frac{y^3}{3}$$

satisfaz a 2.ª equação de ①. Segue que

$$x^3y^2 + 4x + \frac{y^3}{3}$$

satisfaz ①. (Por quê?) Logo,

$$f(x, y) = x^3y^2 + 4x + \frac{y^3}{3} + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

é a família das soluções de ①.

Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ duas funções dadas, definidas num aberto A do $\mathbb{R}^2$. O problema que se coloca é o seguinte: o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

admite sempre solução? A resposta em geral é não. A seguir apresentaremos uma *condição necessária* para que o sistema admita solução.

Teorema 2. Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ duas funções definidas e de classe C^1 num aberto A do $\mathbb{R}^2$. Uma *condição necessária* para que exista uma função $f: A \to \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $(x, y) \in A$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \end{cases}$$

é que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ em A.

Demonstração

Suponhamos que tal f exista; assim

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \end{cases} \quad \text{em } A.$$

Derivando os dois membros da primeira equação em relação a y e os da segunda em relação a x, obtemos, para todo $(x, y) \in A$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Como P e Q são supostas de classe C^1, resulta que f será de classe C^2; pelo teorema de Schwarz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$. Logo,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ em } A. \ ■$$

EXEMPLO 2. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y \end{cases}$$

Como $\dfrac{\partial}{\partial y}(xy) \neq \dfrac{\partial}{\partial x}(y)$ em $\mathbb{R}^2$, segue que não existe função definida em $\mathbb{R}^2$ que satisfaça o sistema.

EXEMPLO 3. Determine, caso existam, todas as funções $z = f(x, y)$ tais que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2} - e^{-y} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Solução

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - e^{-y}\right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Assim,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

onde $P(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ e $Q(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} - e^{-y}$.

A condição necessária está verificada; o sistema pode admitir soluções. Deixamos a seu cargo verificar que

$$z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + e^{-y} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

é a família das soluções do sistema.

Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: a condição necessária do teorema 2 é também suficiente? A resposta é não. (Veja Exercícios 9 e 10.) Entretanto, se algumas restrições forem impostas ao conjunto A a condição será, também, suficiente. Este problema será discutido no volume 3.

Exercícios 15.3

1. Determine todas as funções $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que

   a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 10x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 1$

   b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy + 3x^2 - y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy - x + 3y^2$

   c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + \dfrac{1}{1+y^2}$

2. Determine a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto (1, 2, 1) e tal que

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3 - 2x, 3x^2y^2 + 2y - 1).$$

3. Determine a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto (0, 0, 2) e tal que

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2} + ye^{y^2}\right).$$

4. Existe função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 + 1),$$

para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$? Justifique.

5. Determine $z = \varphi_1(x, y)$, $y > 0$, tal que $\varphi_1(1, 1) = \dfrac{\pi}{4}$ e, para todo $y > 0$,

$$\nabla \varphi_1(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

6. Determine $z = \varphi_2(x, y)$, $x < 0$, tal que $\varphi_2(-1, 1) = \dfrac{3\pi}{4}$ e, para todo $x < 0$,

$$\nabla \varphi_2(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

7. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$. Determine $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in A$, tal que $\varphi(-1, 1) = \dfrac{3\pi}{4}$ e, para todo $(x, y) \in A$,

$$\nabla \varphi(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

(*Sugestão.* Utilize os Exercícios 5 e 6.)

8. Um campo de forças $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, onde P e Q são funções definidas num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, denomina-se *conservativo* se existe um campo escalar $\varphi: A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla \varphi(x, y) = \vec{F}(x, y) \text{ em } A.$$

Uma tal função φ, quando existe, denomina-se *função potencial* associada ao campo $\vec{F}$. O campo de forças dado é conservativo? Justifique.

   a) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ *b)* $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$

c) $\vec{F}(x, y) = y\,\vec{i} + (x + 2y)\,\vec{j}$ d) $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

e) $\vec{F}(x, y) = 4\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$ f) $\vec{F}(x, y) = e^{x^2 - y^2}(2x\,\vec{i} - 2y\ )$

9. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$ um campo de forças com P e Q contínuas no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, uma curva de classe C^1, com $\gamma(a) = \gamma(b)$ (γ é uma *curva fechada*). Suponha que, para todo $t \in [a, b]$, $\gamma(t) \in A$. Prove que se $\vec{F}$ for conservativo, então,

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = 0$$

10. Seja $\vec{F}(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Verifique que, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

onde $P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ e $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$, onde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

c) $\vec{F}$ é conservativo? Por quê?

11. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$ um campo de forças com P e Q definidas e contínuas no aberto A de $\mathbb{R}^2$. Se $\vec{F}$ for conservativo então existirá uma função escalar $U(x, y)$ definida em A tal que $\vec{F} = -\nabla U$ em A. Uma tal função denomina-se *função energia potencial* associada ao campo $\vec{F}$. Determine, caso exista, a função energia potencial associada ao campo $\vec{F}$ dado e satisfazendo a condição dada.

a) $\vec{F}(x, y) = -6x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}$ e $U(0, 0) = 0$.

b) $\vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ e $U(0, 0) = 0$.

c) $\vec{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2} \cdot \dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $U(3, 4) = \dfrac{1}{5}$.

d) $\vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} - xy\,\vec{j}$ e $U(0, 0) = 1.000$.

12. Seja $U(x, y) = 2x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$ a função energia potencial associada ao campo $\vec{F}$.

a) Determine $\vec{F}$.

b) Uma partícula de massa 1 é abandonada na posição (1, 1) com velocidade nula. Admita que $\vec{F}$ é a única força atuando sobre a partícula. Determine a posição $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ da partícula no instante t. Desenhe a trajetória descrita pela partícula.

(*Sugestão.* Pela lei de Newton $\ddot{\gamma}(t) = \vec{F}(\gamma(t))$.)

13. Seja $U(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ a energia potencial associada do campo $\vec{F}$.

a) Determine $\vec{F}$.

b) Uma partícula de massa $m = 1$ é abandonada na posição (1, 1) com velocidade inicial $\vec{v_0} = (-1, 1)$. Sendo $\vec{F}$ a única força atuando sobre a partícula, determine a posição $\gamma(t)$ da partícula no instante t. Desenhe a trajetória descrita pela partícula.

14. Seja $\vec{F}$ a força do exercício anterior. Uma partícula de massa $m = 1$ é abandonada na posição (1, 0) com velocidade inicial $\vec{v_0} = (0, 2)$. Sendo $\vec{F}$ a única força atuando sobre a partícula, determine a posição $\gamma(t)$ da partícula no instante t. Desenhe a trajetória descrita pela partícula.

15.4. POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM 1

Seja $f(x, y)$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \neq (0, 0)$ tais que o segmento de extremidades (x_0, y_0) é $(x_0 + h, y_0 + k)$ esteja contido em A. Consideremos a função g dada por

$$g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt),\ t \in [0, 1].$$

A g fornece os valores que a f assume nos pontos do segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$. Esta função g desempenhará o papel de ligação na extensão da fórmula de Taylor para funções de duas variáveis reais.

Pela fórmula de Taylor, com resto de Langrange, para funções de uma variável, temos:

① $$g(1) = g(0) + g'(0)(1 - 0) + \frac{g''(\bar{t})}{2}(1 - 0)^2$$

para algum $\bar{t}$ em $]0, 1[$.

Calculemos, agora, $g'(t)$ e $g''(t)$:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dt}$$

ou seja,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,k$$

onde $x = x_0 + ht$ e $y = y_0 + kt$;

$$g''(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]h + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]k =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y)k\right]h + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y)h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)k\right]k,$$

ou seja,

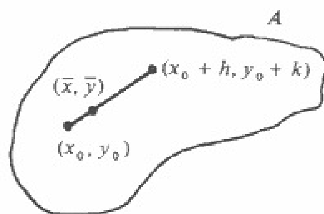
$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\, k^2$$

onde $x = x_0 + ht$ e $y = y_0 + kt$.

Temos, então:

$$② \quad \begin{cases} g(1) = f(x_0 + h, y_0 + k),\ g(0) = f(x_0, y_0), \\ g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \text{ e} \\ g''(\bar{t}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2 \\ \text{onde } \bar{x} = x_0 + h\bar{t} \text{ e } \bar{y} = y_0 + k\bar{t}. \end{cases}$$

Observe que $(\bar{x}, \bar{y})$ é um ponto interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$, pois $\bar{t} \in]0, 1[$.



Substituindo ② em ① resulta:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2\right]$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Demonstramos, assim, o seguinte teorema.

Teorema. Seja $f(x, y)$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \neq (0, 0)$ tais que o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ esteja contido em A. Nestas condições,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2\right]$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Observação. Fazendo $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, obtemos

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}_{P_1(x, y)} + E_1(x, y)$$

onde

$$③ \quad E_1(x, y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2\right]$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e (x, y).

O polinômio

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

denomina-se *polinômio de Taylor de ordem 1 de $f(x, y)$ em volta de (x_0, y_0)*.

Observe que o gráfico de $P_1(x, y)$ é o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. $E_1(x, y)$ é o erro que se comete na aproximação de $f(x, y)$ por $P_1(x, y)$; ③ é a expressão do erro na *forma de* Lagrange. (Às vezes, usa-se a expressão *resto* em lugar de erro.)

EXEMPLO. Seja $f(x, y) = \ln(x + y)$.

a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Mostre que para todo (x, y), com $x + y > 1$, $|\ln(x + y) - (x + y - 1)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$.

Solução

a) $P_1(x, y) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$.

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x + y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

resulta:

$$P_1(x, y) = 0 + \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right).$$

ou seja,

$$P_1(x, y) = x + y - 1.$$

b) $\ln(x + y) = P_1(x, y) + E(x, y)$, onde

$$E(x, y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})\left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e (x, y). Temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-1}{(x+y)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Como estamos supondo $x + y > 1$, teremos, também, $\bar{x} + \bar{y} > 1$. Assim, para todo (x, y), com $x + y > 1$, $\left|\frac{-1}{(\bar{x}+\bar{y})^2}\right| < 1$. Segue que

$$|E(x, y)| < \frac{1}{2}\left|\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right|$$

ou

$$|E(x, y)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$$

para todo (x, y), com $x + y > 1$. Assim,

$$|\ln(x + y) - P_1(x, y)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$$

ou

$$|\ln x + y) - (x + y - 1)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$$

para todo (x, y), com $x + y > 1$.

Exercícios 15.4

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.
   a) $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
   b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
   c) $f(x, y) = \text{sen}(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
2. Sejam $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(0, 0)$.
   a) Mostre que para todo (x, y), com $x + 5y < 1$,
   $$|e^{x+5y} - P_1(x, y)| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2$$
   b) Avalie o erro que se comete na aproximação
   $$e^{x+5y} \cong P_1(x, y)$$
   para $x = 0{,}01$ e $y = 0{,}01$.
3. Sejam $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de (1, 1). Mostre que para todo (x, y), com $|x - 1| < 1$ e $|y - 1| < 1$,
   $$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 7(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2$$
4. Sejam $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de (1, 1).
   a) Utilizando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(x, y)$, sendo $x = 1{,}001$ e $y = 0{,}99$.
   b) Avalie o erro que se comete na aproximação do item a).
   (*Sugestão*. Utilize o Exercício 3.)

5. Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de $f(x, y)$ e suponha que f seja de classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0, y_0). Prove que para todo (x, y) em B, existe $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e (x, y) tal que
   $$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2\right]$$
6. Seja $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$ (a, b, c, d, e, m constantes) e seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f. Prove que, para todo (h, k),
   $$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2.$$
7. Sejam $f(x, y)$ e (x_0, y_0) como no exercício anterior. Prove que se $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então
   $$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$$
   para todo $(h, k) \neq (0, 0)$. Como é o gráfico de f?
8. Suponha $f(x, y)$ da classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0, y_0) e que as derivadas parciais de 2.ª ordem sejam limitadas em B. Prove que existe $M > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in B$,
   $$|f(x, y) - P_1(x, y)| \leq M\,\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$$
   onde $P_1(x, y)$ é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de (x_0, y_0).
9. Considere o polinômio $P(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$, com a, b, c, x_0 e y_0 constantes. Suponha que exista $M > 0$ tal que, para todo (x, y),
   $$|P(x, y)| \leq M\,\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2.$$
   Prove que $P(x, y) = 0$ em $\mathbb{R}^2$.
10. Seja $f(x, y)$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja (x_0, y_0) um ponto de A. Seja o polinômio $P(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$, com a, b e c constantes. Suponha que existam $M > 0$ e uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), com $B \subset A$, tal que, para todo (x, y) em B,
    $$|f(x, y) - P(x, y)| \leq M\,\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2.$$
    Prove que P é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de (x_0, y_0).

15.5. Polinômio de Taylor de Ordem 2

Suponhamos $f(x, y)$ de classe C^3 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Sejam (x_0, y_0), $(x_0 + h, y_0 + k)$ e $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ como na seção anterior. Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange, para funções de uma variável segue que

$$\text{①} \quad g(1) = g(0) + g'(0)(1 - 0) + \frac{g''(0)}{2!}(1 - 0)^2 + \frac{g'''(\bar{t})}{3!}(1 - 0)^3$$

para algum $\bar{t}$ em]0, 1[.

Vimos no parágrafo anterior que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k$$

e

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)k^2$$

onde $x = x_0 + ht$ e $y = y_0 + kt$. Deixamos a seu cargo verificar que

$$g'''(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)k^3$$

onde $x = x_0 + ht$ e $y = y_0 + kt$. Temos:

$$② \begin{cases} g(1) = f(x_0 + h, y_0 + k),\ g(0) = f(x_0, y_0), \\ g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k, \\ g''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 \quad \text{e} \\ g'''(\bar{t}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}, \bar{y})h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}, \bar{y})h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x}, \bar{y})k^3 \\ \text{onde } \bar{x} = x_0 + h\bar{t} \text{ e } \bar{y} = y_0 + k\bar{t}. \end{cases}$$

Substituindo ② em ① resulta:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}, \bar{y})h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}, \bar{y})h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})hk^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x}, \bar{y})k^3\right],$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Demonstramos assim o seguinte

Teorema. Seja $(\bar{x}, \bar{y})$ de classe C^3 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \neq (0, 0)$ tais que o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ esteja contido em A.

Nestas condições,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}, \bar{y})h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}, \bar{y})h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})hk^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)k^3\right],$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

O polinômio

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right]$$

denomina-se *polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de* (x_0, y_0).

Fazendo $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$ no teorema acima, resulta:

$$f(x, y) = P_2(x, y) + E_1(x, y)$$

onde

$$E_1(x, y) = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2(y - y_0) + \right.$$
$$\left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^3\right]$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e (x, y).

Exercícios 15.5

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.
   a) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
   b) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
2. Expresse o polinômio $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ como soma de termos do tipo $a(x - 1)^p (y - 1)^q$.
3. Seja $P_2(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$ em volta de $(0, 0)$. Mostre que

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| < \frac{|y|^2}{2}\left[|x| + \frac{1}{3}|y|\right]$$

para todo (x, y), com $|x| < 1$.

4. Seja $f(x, y)$ de classe C^3 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja (x_0, y_0) um ponto de A (lembre-se de que f de classe C^2 em A significa que todas as derivadas parciais de ordem 3 são contínuas em A). Prove que existem uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), com $B \in A$, e um número $M > 0$ tais que, para todo $(x, y) \in B$,

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| \leq M\,\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^3$$

onde $P_2(x, y)$ é o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de (x_0, y_0). Conclua que

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2} = 0$$

onde $E(x, y) = f(x, y) - P_2(x, y)$; isto é, o erro $E(x, y)$ tende a zero mais rapidamente que $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$, quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

5. Sejam $f(x, y)$, $P_2(x, y)$ e (x_0, y_0) como no exercício 4. Prove que existe uma função $\varphi(x, y)$ definida em A tal que, para todo (x, y) em A,

$$f(x, y) = P_2(x, y) + \varphi(x, y)\,\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$$

com

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) = 0.$$

6. Seja $f(x, y)$ de classe C^3 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja (x_0, y_0) um ponto de A. Seja $\overline{P}_2(x, y)$ um polinômio de grau no máximo 2. Prove que se

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - \overline{P}_2(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2} = 0$$

então $\overline{P}_2(x, y)$ é o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de (x_0, y_0).

15.6. Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

Suponhamos $f(x, y)$ de classe C^{n+1} no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Sejam (x_0, y_0), $(x_0 + h, y_0 + k)$ e $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ como na seção anterior. Vimos que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k,$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{p=0}^{2} \binom{2}{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-p}\,\partial y^p}(x, y)\,h^{2-p}k^p = \\ &= \binom{2}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h^2 + \binom{2}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y)hk + \binom{2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)k^2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)k^2 \end{aligned}$$

e que

$$g'''(t) = \sum_{p=0}^{3} \binom{3}{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-p}\,\partial y^p}(x, y)\,h^{3-p}k^p$$

onde $x = x_0 + ht$ e $y = y_0 + kt$. Deixamos a seu cargo provar por indução que

$$g^{(r)}(t) = \sum_{p=0}^{r} \binom{r}{p} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-p}\,\partial y^p}(x, y)\,h^{r-p}k^p$$

onde $x = x_0 + ht$ e $y = y_0 + kt$.

Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange para funções de uma variável, temos:

$$g(1) = g(0) + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!} g^r(0) + \frac{g^{(n+1)}(\bar{t})}{(n+1)!}$$

para algum $\bar{t}$ em $]0, 1[$. Segue que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!}\left[\sum_{p=0}^{r}\binom{r}{p}\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-p}\,\partial y^p}(x_0, y_0)\,h^{r-p}k^p\right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-p}\,\partial y^p}(\bar{x}, \bar{y})\,h^{n+1-p}k^p$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Fica provado assim o seguinte

Teorema (*Fórmula de Taylor com resto de Lagrange*). Seja $f(x, y)$ de classe C^{n+1} no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \neq (0, 0)$ tais que o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ esteja contido em A. Nestas condições

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!}\left[\sum_{p=0}^{r}\binom{r}{p}\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-p}\,\partial y^p}(x_0, y_0)\,h^{r-p}k^p\right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-p}\,\partial y^p}(\bar{x}, \bar{y})\,h^{n+1-p}k^p$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

16

MÁXIMOS E MÍNIMOS

16.1. PONTOS DE MÁXIMO E PONTOS DE MÍNIMO

Seja $f(x, y)$ uma função a valores reais e seja $(x_0, y_0) \in A$, com $A \subset D_f$. Dizemos que (x_0, y_0) é *ponto de máximo de* f em A se, para todo (x, y) em A,

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0).$$

Sendo (x_0, y_0) ponto de máximo de f em A, o número $f(x_0, y_0)$ será denominado *valor máximo* de f em A.

Dizemos que $(x_0, y_0) \in D_f$ é *ponto de máximo global ou absoluto* de f se, para todo $(x, y) \in D_f$,

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0).$$

Diremos, neste caso, que $f(x_0, y_0)$ é o *valor máximo* de f.

Finalmente, diremos que $(x_0, y_0) \in D_f$ é *ponto de máximo local* de f se existir uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) tal que

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

para todo $(x, y) \in B \cap D_f$.

Deixamos a seu cargo definir ponto de mínimo de f em $A \subset D_f$, ponto de mínimo global e ponto de mínimo local.

Os pontos de máximo e de mínimo de uma função f denominam-se *extremantes* de f.

EXEMPLO 1. $(0, 0)$ é ponto de mínimo global de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $f(0, 0) = 0$ é o valor mínimo de f, pois, $f(x, y) \geqslant f(0, 0)$, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = 2x - y$ e seja A o conjunto determinado pelas condições $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$ e $y \geqslant x$. Estude f com relação a máximo e mínimo em A.

Solução

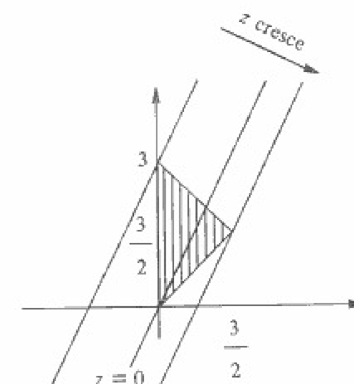
Tal estudo será feito com auxílio das curvas de nível de f.

$z = 2x - y$

$z = 0 \Leftrightarrow y = 2x$

$z = -3 \Leftrightarrow y = 2x + 3 \; [f(0, 3) = -3]$

$z = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = 2x - \frac{3}{2} \left[f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \right]$



Vemos, geometricamente, que $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e $(0, 3)$ são, respectivamente, *pontos de máximo* e *de mínimo* de f em A; $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ é o *valor máximo* e $f(0, 3) = -3$ é o *valor mínimo* de f em A. Para comprovar analiticamente que o que dissemos acima está correto, podemos proceder do seguinte modo: para todo (x, y) em A

$$f(x, y) - f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2x - y - \frac{3}{2} = -\underbrace{\left(\frac{3}{2} - x\right)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(y - x)}_{\geqslant 0} \leqslant 0$$

ou seja, $f(x, y) \leqslant f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$$f(x, y) - f(0, 3) = 2x - y + 3 = \underbrace{3x}_{\geqslant 0} + \underbrace{(3 - x - y)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

ou seja,

$$f(x, y) \geqslant f(0, 3).$$

EXEMPLO 3. Seja (x, y) definida em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ 1 - (x - 3)^2 - y^2 & \text{se } x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

$(0, 0)$ é ponto de mínimo local; $(3, 0)$ é ponto de máximo local e todo (x_0, y_0) pertencente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ é ponto de máximo global de f. Deixamos a seu cargo fazer um esboço do gráfico de f e verificar as afirmações acima.

16.2. Condições Necessárias para que um Ponto Interior ao Domínio de f seja um Extremante Local de f

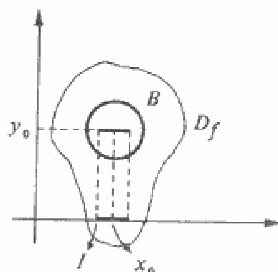
O teorema que enunciaremos e demonstraremos a seguir fornece-nos um critério para selecionar, entre os *pontos interiores de* D_f, candidatos a extremantes locais de f.

> ***Teorema 1.*** Seja (x_0, y_0) um *ponto interior de* D_f e suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existam. Nestas condições, uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja um extremante local de f é que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Demonstração

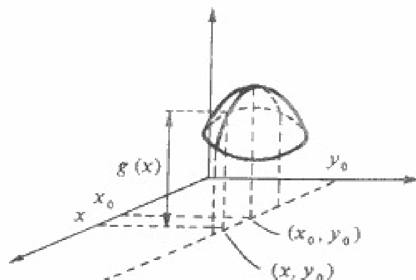
Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local de f. Como (x_0, y_0) é ponto interior de D_f, existe uma bola aberta $B \subset D_f$, B de centro (x_0, y_0), tal que, para todo (x, y) em B

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0).$$



Por outro lado, existe um intervalo aberto I, com $x_0 \in I$, tal que para todo $x \in I$, $(x, y_0) \in B$. Consideremos a função g dada por

$$g(x) = f(x, y_0), \ x \in I.$$



Temos:

$$\begin{cases} g \text{ é derivável em } x_0 \left(g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \\ x_0 \text{ é ponto interior de } I \text{ e} \\ x_0 \text{ é ponto de máximo local de } g \end{cases}$$

daí

$$g'(x_0) = 0$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

De modo análogo, demonstra-se que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$ ■

Segue deste teorema que se (x_0, y_0) for interior a D_f, f diferenciável em (x_0, y_0) e (x_0, y_0) extremante local de f, então o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ será paralelo ao plano xy.

Dizemos que (x_0, y_0) é um *ponto crítico* ou *estacionário* de f se (x_0, y_0) for interior a D_f e se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. O teorema anterior nos diz que se *f admite derivadas parciais em todos os pontos interiores de D_f, então os pontos críticos de f são, entre os pontos interiores de D_f, os únicos candidatos a extremantes locais de f.*

Um ponto $(x_0, y_0) \in A$ que não é ponto interior de A denomina-se *ponto de fronteira de A*. O teorema anterior não se aplica a pontos de fronteira de D_f; um ponto de fronteira de D_f pode ser um extremante local sem que as derivadas parciais se anulem nele. Os pontos de fronteira devem ser analisados separadamente.

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como D_f é um conjunto aberto ($D_f = \mathbb{R}^2$), de

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x \end{cases}$$

segue que $(0, 0)$ é o único candidato a extremante local. Como $f(x, y) \geqslant f(0, 0) = 0$, para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$, resulta que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global de f.

EXEMPLO 2. O único ponto crítico de $f(x, y) = x^2 - y^2$ é $(0, 0)$. Verifica-se sem dificuldade que $(0, 0)$ não é extremante local (para uma visualização geométrica, desenhe as interseções do gráfico de f com os planos yz e xz). O ponto $(0, 0)$ denomina-se *ponto de sela*. O gráfico desta função tem o aspecto de uma "sela de cavalo": tente desenhá-lo.

EXEMPLO 3. Seja $z = f(x, y)$, com domínio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$, onde $f(x, y) = x^2y + 3x$. O ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo de f em A pois $f(x, y) \geq f(0, 0)$ em A. Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3$, segue que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 3 \neq 0$. Este fato não contradiz o teorema 1, pois ele só se aplica a pontos interiores de D_f e $(0, 0)$ não é ponto interior de D_f ($D_f = A$).

Suponhamos, agora, que o domínio de f seja aberto e que f seja de classe C^2. Suponhamos, ainda, que $(x_0, y_0) \in D_f$ seja um ponto de máximo local de f. Consideremos a função $g(x)$ dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Tendo em vista as hipóteses sobre f, segue que x_0 é ponto interior do domínio de g e, além disso, é ponto de máximo local de g; como g é, também, de classe C^2 teremos que ter necessariamente

$$g'(x_0) = 0 \text{ e } g''(x_0) \leq 0$$

(observe que se tivéssemos $g''(x_0) > 0$, x_0 teria que ser ponto de mínimo local de g). Da mesma forma, considerando a função $h(y) = f(x_0, y)$, teremos que ter necessariamente

$$h'(y_0) = 0 \text{ e } h''(y_0) \leq 0.$$

Fica provado assim o seguinte teorema.

> ***Teorema 2.*** Seja f de classe C^2 e seja (x_0, y_0) um ponto interior do domínio de f. Uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja ponto de máximo local de f é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f e, além disso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$. (Interprete geometricamente.)

Se no teorema acima as condições $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$ forem trocadas por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$ teremos uma *condição necessária* para (x_0, y_0) ser *ponto de mínimo local de f*.

EXEMPLO 4. Determine os candidatos a extremantes locais de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$.

Solução

Os únicos candidatos a extremantes locais são os pontos críticos, pois o domínio de f ($D_f = \mathbb{R}^2$) é aberto. De

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$$

resulta que os candidatos a extremantes locais são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

As soluções do sistema são: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$. Temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 6$; logo, $(1, 1)$ é candidato a ponto de mínimo local.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 6$; logo, $(-1, 1)$ não é extremante local. O mesmo acontece com o ponto $(1, -1)$. (Interprete geometricamente.)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -6$; logo, $(-1, -1)$ é candidato a ponto de máximo local.

Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de $f(x, y)$. Sejam $g(x) = f(x, y_0)$ e $h(y) = f(x_0, y)$. Observemos que se x_0 não for extremante local de g, então (x_0, y_0) não será extremante local de f. Da mesma forma, se y_0 não for extremante local de h, então (x_0, y_0) não será extremante local de f. (Verifique.)

Exercícios 16.2

Selecione os candidatos a extremantes locais, sendo $f(x, y) =$

1. $2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$.
2. $x^2 - y^2 + 3xy - x + y$.
3. $x^3 - y^2 + xy + 5$.
4. $x^3 + y^3 - xy$.
5. $x^4 + y^4 + 4x + 4y$.
6. $x^5 + y^5 - 5x - 5y$.

16.3. Uma Condição Suficiente para um Ponto Crítico Ser Extremante Local

Seja $f(x, y)$ de classe C^2. A função H dada por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

denomina-se *hessiano* de f. Observe que

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right]^2.$$

O próximo teorema fornece-nos uma condição suficiente para um ponto crítico de f ser extremante local de f.

> ***Teorema.*** Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um *ponto interior* de D_f. Suponhamos que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f. Então
>
> *a)* Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de mínimo local de f.
>
> *b)* Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo local de f.
>
> *c)* Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) não será extremante local. Neste caso, (x_0, y_0) será *ponto de sela*.
>
> *d)* Se $H(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar.

Demonstração

Veja Exemplos 3, 4 e 5 da Seç. 16.6. ■

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$. Os pontos críticos de f são: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$. Temos:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x.$$

Então:

$H(1, 1) = 36 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$; logo, $(1, 1)$ é *ponto de mínimo local*. Note que $(1, 1)$ não é ponto de mínimo global, pois $f(-3, 0) < f(1, 1)$.

$H(-1, -1) = 36 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$; logo $(-1, -1)$ é *ponto de máximo local*; entretanto, $(-1, -1)$ não é ponto de máximo global, pois $f(4, 0) > f(-1, -1)$. Como $H(-1, 1) < 0$ e $H(1, -1) < 0$, segue que $(-1, 1)$ e $(1, -1)$ não são extremantes, são *pontos de sela*.

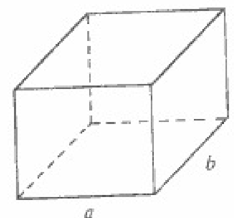
EXEMPLO 2. Seja $f(x, y) = 3x^4 + 2y^4$. O único ponto crítico de f é $(0, 0)$ e temos $H(0, 0) = 0$; logo, o teorema não nos fornece informação sobre este ponto crítico. Trabalhando diretamente com a função verifica-se sem dificuldade que $(0, 0)$ é ponto de mínimo global.

EXEMPLO 3. Seja $f(x, y) = x^5 + 2y^5$. O único ponto crítico é $(0, 0)$ e $H(0, 0) = 0$. Como $x = 0$ não é extremante local de $f(x, 0) = x^5$, resulta que $(0, 0)$ não é extremante local de f.

EXEMPLO 4. Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo retângulo e com 1 m^3 de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

Solução

$$abc = 1 \text{ ou } c = \frac{1}{ab}.$$



O problema consiste em minimizar

$$f(a, b) = 3(2ac + 2bc) + ab, \text{ onde } c = \frac{1}{ab},$$

ou

$$f(a, b) = \frac{6}{b} + \frac{6}{a} + ab,\ a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{6}{a^2} + b \text{ e } \frac{\partial f}{\partial b} = -\frac{6}{b^2} + a.$$

$$\begin{cases} -\dfrac{6}{a^2} + b = 0 \\ -\dfrac{6}{b^2} + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 6 \\ ab^2 = 6 \end{cases}$$

$$a^2 b = ab^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Assim, $(a, b) = (\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ é o único ponto crítico de f. Como $H(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) > 0$ e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) > 0$$

(verifique) resulta que $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ é ponto de mínimo local. Pela natureza do problema, é razoável esperar que este ponto seja de mínimo global. As dimensões que minimizam o custo são: $a = \sqrt[3]{6}$, $b = \sqrt[3]{6}$ e $c = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{6}$. (Uma forma elegante de justificar que $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ é ponto de mínimo global é a seguinte: para cada $a > 0$, seja $h(a)$ o valor mínimo de $g(b) = \dfrac{6}{a} + \dfrac{6}{b} +$

ab, $b > 0$; verifique, então, que o valor mínimo de $h(a)$ é $f\left(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}\right)$. Descreva geometricamente este processo.)

Exercícios 16.3

1. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função $f(x, y) =$

   a) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
   b) $x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$
   c) $x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
   d) $-x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 2y$
   e) $x^3 - 3x^2y + 27y$
   f) $x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 3y + 1$
   g) $\sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$
   h) $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$
   i) $x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$
   j) $x^4 + y^4 + 4x + 4y$
   l) $x^5 + y^5 - 5x - 5y$
   m) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy$, $x > 0$ e $y > 0$

2. Seja $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e e l são constantes. Prove que se (x_0, y_0) for extremante local de f, então será extremante global.

   (*Sugestão.* Observe que o gráfico de $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ (h e k constantes) é uma parábola.)

3. Estude com relação a extremantes globais a função $f(x, y) =$

   a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$
   b) $x^2 - y^2 - 3xy + x + 4y$
   c) $x + 2y - 2xy - x^2 - 3y^2$
   d) $3x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$
   e) $x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$
   f) $x^2 + y^2 - 2x - 4y$

   (*Sugestão.* Utilize o Exercício 2.)

4. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

5. *Método dos mínimos quadrados.* Dados n pares de números (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), com $n \geq 3$, em geral não existirá uma função afim $f(x) = \alpha x + \beta$ cujo gráfico passe por todos os n pontos. Entretanto, podemos determinar f de modo que a soma dos quadrados dos erros $f(a_i) - b_i$ seja mínima. Pois bem, determine α e β para que a soma

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [f(a_i) - b_i]^2$$

   seja mínima.

6. Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados:

   a) (1, 3), (2, 7) e (3, 8)
   b) (0, 1), (1, 3), (2, 3) e (3, 4)

7. Determinado produto apresenta uma demanda y (em milhares) quando o preço, por unidade, é x (em R$). Foram observados os seguintes dados:

x	y
5	100
6	98
7	95
8	94

   A tabela nos diz que ao preço unitário de 5 reais a demanda foi de 100.000 unidades; ao preço unitário de 6 reais a demanda foi de 98.000 unidades etc.

   a) Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados observados.

   b) Utilizando a reta encontrada no item *a*), faça uma previsão para a demanda quando o preço, por unidade, for 10 reais.

8. Considere as retas reversas r e s de equações

   $(x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(1, 2, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

   e

   $(x, y, z) = (0, 0, 4) + \mu(1, 1, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$

   respectivamente. Determine P e Q, com $P \in r$ e $Q \in s$, de modo que a distância de P a Q seja a menor possível.

9. Duas partículas P_1 e P_2 deslocam-se no espaço com velocidades constantes $\vec{v_1} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$, respectivamente. No instante $t = 0$ a P_1 encontra-se na posição $(1, 1, 3)$. Sabe-se que a trajetória descrita por P_2 passa pelo ponto $(1, 1, 0)$. Qual deverá ser a posição de P_2 no instante $t = 0$ para que a distância mínima entre elas seja a menor possível?

10. Determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações: $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

11. Para produzir determinado produto cuja quantidade é representada por z, uma empresa utiliza dois fatores de produção (insumos) cujas quantidades serão indicadas por x e y. Os preços unitários dos fatores de produção são, respectivamente, 2 e 1. O produto será oferecido ao mercado consumidor a um preço unitário igual a 5. A função de produção da empresa é dada por $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$. Determine a produção que maximiza o lucro.

12. Considere o sistema de partículas $P_1, P_2, ..., P_n$, localizadas nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ e de massas $m_1, m_2, ..., m_n$. Seja $N = (x, y)$. Determine N para que o momento de inércia do sistema, em relação a N, seja mínimo. Conclua que o N encontrado é o centro de massa do sistema.

    (*Observação.* O *momento de inércia de* P_i *em relação a* N é o produto de m_i pelo quadrado da distância de P_i a N; o *momento de inércia do sistema em relação a* N é a soma dos momentos de inércia, em relação a N, das partículas que compõem o sistema.)

13. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.

14. Considere a função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Determine o plano tangente ao gráfico de f que forma com os planos coordenados tetraedro de volume mínimo.

15. Seja $f(x, y, z)$ de classe C^2 e seja (x_0, y_0, z_0) um ponto interior de D_f. Suponham os que (x_0, y_0, z_0) seja ponto crítico de f. Sejam $H(x, y, z)$ e $H_1(x, y, z)$ dadas por

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad H_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

    Pode ser provado (veja 16.6) que:

    (i) se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) > 0$, $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $H(x_0, y_0, z_0) > 0$, então (x_0, y_0, z_0) será ponto de mínimo local.

(ii) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) < 0$, $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $H(x_0, y_0, z_0) < 0$, então (x_0, y_0, z_0) será ponto de máximo local.

Estude com relação a máximos e mínimos locais a função $f(x, y, z) =$

a) $x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$.
b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$.
c) $x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$.
d) $x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$.

16. Seja $f(x, y, z)$ de classe C^2 e seja (x_0, y_0, z_0) ponto interior de D_f. Suponha que (x_0, y_0, z_0) seja ponto crítico de f. Prove:

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$ é uma condição necessária para o ponto crítico (x_0, y_0, z_0) ser ponto de mínimo local de f.

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$ é uma condição necessária para o ponto crítico (x_0, y_0, z_0) ser ponto de máximo local de f.

17. A função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 5x + 2y - z + 8$ admite extremante local? Por quê?

18. Seja $f(x, y)$ definida e de classe C^2 no aberto A de $\mathbb{R}^2$. Suponha que, para todo $(x, y) \in A$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0.$$

Prove que f não admite ponto de máximo local.

19. Seja $f(x, y) = x^2(y^4 - x^2)$ e considere, para cada $\vec{v} = (h, k)$, a função $g_{\vec{v}}(t) = f(ht, kt)$ (observe que $g_{\vec{v}}$ fornece os valores de f sobre a reta $(x, y) = t(h, k)$). Verifique que $t = 0$ é ponto de máximo local de cada $g_{\vec{v}}$ mas que $(0, 0)$ não é ponto de máximo local de f.

20. Seja $f(x, y)$ uma função que admita derivadas parciais em todo $\mathbb{R}^2$. Suponha que f admita um único ponto crítico (x_0, y_0) e que este ponto crítico seja ponto de máximo local. Pode-se concluir que (x_0, y_0) é ponto de máximo global?

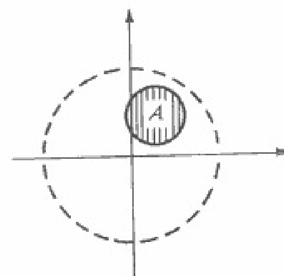
16.4. Máximos e Mínimos sobre Conjunto Compacto

Nas seções anteriores determinamos condições necessárias e condições suficientes para que um ponto de D_f seja um extremante local de f. Entretanto, para muitos problemas que ocorrem na prática é importante determinar os extremantes em um subconjunto A de D_f. O teorema de Weierstrass, que é o próximo teorema a ser enunciado, fornece-nos condições suficientes para a existência de tais extremantes..

Para enunciar o teorema de Weierstrass precisaremos antes definir *conjunto compacto*.

Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^2$; dizemos que A é um *conjunto limitado* se A estiver contido em alguma bola aberta de centro na origem. Dizemos, por outro lado, que A é um *conjunto fechado* se o seu complementar $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \notin A\}$ for um conjunto aberto. Pois bem, dizemos que A é um *conjunto compacto* se A for fechado e limitado.

EXEMPLO 1. Toda bola fechada A de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq r\}$ é um conjunto compacto, pois é limitado e fechado.



A é um conjunto limitado e seu complementar é um conjunto aberto.

EXEMPLO 2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ é um conjunto fechado, mas não limitado, logo, *A não é compacto.*

EXEMPLO 3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$ é um conjunto limitado e fechado, logo *compacto*.

O teorema de Weierstrass, que enunciaremos a seguir (para demonstração veja Exercícios 9 a 12), conta-nos que se *f for contínua no compacto A, então f assumirá em A valor máximo e valor mínimo.*

> ***Teorema*** (de *Weierstrass*). Se $f(x, y)$ for contínua no compacto A, então existirão pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em A tais que, para todo (x, y) em A,
>
> $$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2).$$

O teorema de Weierstrass garante-nos que se f for *contínua em A* e *A compacto*, então *existirão* pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em A tais que $f(x_1, y_1)$ é o *valor mínimo* e $f(x_2, y_2)$ é o *valor máximo* de f em A. Resta-nos, agora, o problema de determinar tais pontos. Suponhamos que f admita derivadas parciais nos pontos interiores de A. Sabemos, então, que entre os pontos interiores de A os únicos com possibilidades de serem extremantes são os pontos críticos: a nossa primeira tarefa consiste, então, em determinar os pontos críticos de f que estão no interior de A. Em seguida, procuramos determinar os valores máximo e mínimo de f na fronteira de A. Comparamos, então, os valores que f assume nos pontos críticos com o valor máximo de f na fronteira de A: o maior destes valores será o valor máximo de f em A. De modo análogo, determina-se o valor mínimo.

EXEMPLO 1. Determine os extremantes de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y \text{ em } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}.$$

Solução

Como f é contínua e A compacto, vamos proceder como dissemos anteriormente.

Pontos críticos de f no interior de A

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3.$$

As soluções do sistema

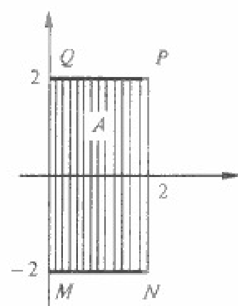
$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

são: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$. Segue que $(1, 1)$ e $(1, -1)$ são os únicos pontos críticos no interior de A. Temos

$$f(1, 1) = -4 \quad \text{e} \quad f(1, -1) = 0.$$

Análise dos pontos de fronteira

$$g(y) = f(2, y) = y^3 - 3y + 2, \; -2 \leqslant y \leqslant 2,$$



fornece-nos os valores que f assume no segmento NP.

$$g'(y) = 3y^2 - 3$$





$$g(-2) = 0, \; g(-1) = 4, \; g(1) = 0 \text{ e } g(2) = 4.$$

Assim, o valor máximo de f no segmento NP é 4 e o valor mínimo é 0. O valor máximo é atingido nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 2)$:

$$f(2, -1) = 4 \text{ e } f(2, 2) = 4.$$

O valor mínimo é atingido nos pontos $(2, -2)$ e $(2, 1)$:

$$f(2, -2) = 0 \text{ e } f(2, 1) = 0.$$

Raciocinando de forma análoga sobre os segmentos PQ, MQ e MN, concluímos que o valor máximo de f sobre a fronteira é 4 e este valor é atingido nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 2)$; o valor mínimo de f sobre a fronteira de A é -4 e este valor é atingido no ponto $(1, -2)$.

Conclusão. Comparando os valores que f assume nos pontos críticos com os valores máximo e mínimo de f na fronteira resulta: o *valor máximo* de f em A é 4 e é atingido nos pontos $(2, -1)$ e $(2, 2)$; o *valor mínimo* de f em A é -4 e é atingido nos pontos $(1, 1)$ e $(1, -2)$.

EXEMPLO 2. Determine os extremantes de $f(x, y) = xy$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

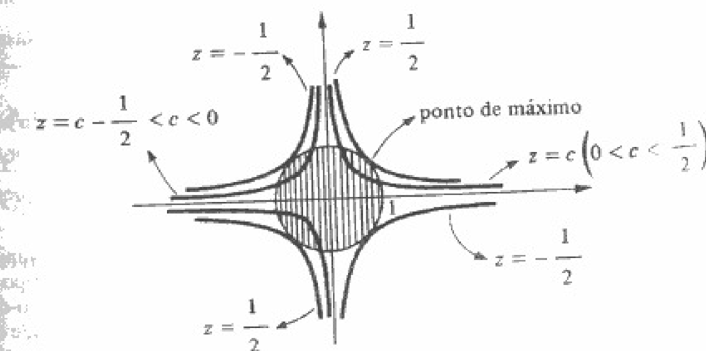
Solução

f é contínua e A compacto; logo, f assume em A valor máximo e valor mínimo. O único ponto crítico no interior de A é $(0, 0)$, e este ponto crítico não é extremante (verifique). Segue que os valores máximo e mínimo de f, em A, são atingidos na fronteira de A. Os valores de f na fronteira de A são fornecidos pela função

$$F(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t, \; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

F atinge o valor máximo em $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{5\pi}{4}$; atinge o valor mínimo em $t = \frac{3\pi}{4}$ e $t = \frac{7\pi}{4}$. Segue que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são os *pontos de máximo* de f em A; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são os *pontos de mínimo* de f em A. O *valor máximo* de f em A é $\frac{1}{2}$, e o *valor mínimo*, $-\frac{1}{2}$. A figura seguinte, na qual estão desenhadas algumas curvas de nível de f, fornece-nos uma visão geométrica do problema:

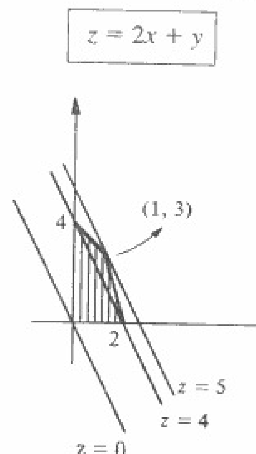
$z = xy$



EXEMPLO 3. Determine os extremantes de $f(x, y) = 2x + y$ em A dado por $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 4$ e $3x + y \leqslant 6$.

Solução

f assume em A valor máximo e valor mínimo, pois f é contínua e A, compacto. Como f não admite ponto crítico, os valores máximo e mínimo são atingidos na fronteira de A.



Como f é uma função afim e a fronteira de A é formada por segmentos de retas (A é um polígono), resulta que entre os vértices de A existe pelo menos um ponto de máximo e pelo menos um ponto de mínimo. Calculando os valores de f nos vértices encontramos:

$$f(1, 3) = 5 \text{ valor máximo e } f(0, 0) = 0 \text{ valor mínimo.}$$

Exercícios 16.4

1. Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto dado.

   a) $f(x, y) = 3x - y$ no conjunto A de todos (x, y) tais que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 3$, $x + y \leqslant 4$ e $3x + y \leqslant 6$.

   b) $f(x, y) = 3x - y$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

   c) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } x + y \leqslant 1\}$.

   d) $f(x, y) = xy$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } 2x + y \leqslant 5\}$.

   e) $f(x, y) = y^2 - x^2$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

   f) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$.

2. Determine (x, y), com $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$, que maximiza a soma $2x + y$.

3. Suponha que $T(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant x \text{ e } 2y + x \leqslant 4\}$. Determine o ponto de A de menor temperatura.

4. Determine o valor máximo de $f(x, y) = x + 5y$ onde x e y estão sujeitos às restrições: $5x + 6y \leqslant 30$, $3x + 2y \leqslant 12$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

5. Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de dois de seus produtos, designados I e II. Para fabricar estes produtos ela utiliza um tipo de máquina que tem uma disponibilidade de 200 máquinas-hora por mês e um tipo de mão-de-obra com uma disponibilidade de 240 homens-hora por mês. Para se produzir uma unidade do produto I utilizam-se 5 horas de máquina e 10 horas de mão-de-obra, enquanto para o produto II utilizam-se 4 horas de máquina e 4 horas de mão-de-obra. Espera-se uma demanda de 20 unidades por mês do produto I e 45 do produto II. Calcula-se um lucro, por unidade, de R$ 10,00 para o produto I e R$ 6,00 para o II. Determine as quantidades de cada produto que deverão ser fabricadas por mês, para o lucro mensal ser máximo.

6. Determine (x, y) que maximiza (minimiza) a função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, com x e y sujeitos às restrições: $y = 1 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

7. Dê exemplo de uma função contínua num conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^2$, mas que não assuma em A valor máximo.

8. Considere a *forma quadrática* $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Sejam $Q(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ os valores mínimo e máximo de Q em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Prove:

   (i) se $Q(x_1, y_1) > 0$, então $Q(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.
   (ii) se $Q(x_2, y_2) < 0$, então $Q(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

9. Suponha A um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A. Prove que $(x_0, y_0) \in A$.

10. Prove que se $f(x, y)$ for contínua em $(x_0, y_0) \in D_f$, então f será localmente limitada em (x_0, y_0) (*f localmente limitada* em (x_0, y_0) significa que existem α e β e uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) tais que $\alpha < f(x, y) < \beta$ para todo (x, y) em $B \cap D_f$).

11. Seja $R_1, R_2, ..., R_n, ...$ uma seqüência de retângulos em $\mathbb{R}^2$, onde $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_n \leqslant x \leqslant c_n, \bar{a}_n \leqslant y \leqslant b_n\}$, tais que $R_1 \supset R_2 \supset ... \supset R_n \supset ...$; suponha que $d_n = \|(a_n, \bar{a}_n) - (c_n, b_n)\|$ tenda a zero quando $n \to +\infty$. Nestas condições, prove que

    $$R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n \cap ... = (\bar{x}, \bar{y})$$

    onde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são os únicos reais tais que

    $$a_n \leqslant \bar{x} \leqslant c_n \text{ e } \bar{a}_n \leqslant \bar{y} \leqslant b_n$$

    para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

12. Seja A um subconjunto fechado e limitado do $\mathbb{R}^2$ e seja $f: A \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que f é limitada em A.

    (*Sugestão.* Suponha que f não seja limitada e construa uma seqüência de retângulos como a do Exercício 11, tal que f não seja limitada em $A \cap R_n$, para $n = 1, 2, ...$; conclua que f não será localmente limitada em $(\bar{x}, \bar{y}) = R_1 \cap R_2 \cap ...$, o que contradiz a hipótese de f ser contínua em $(\bar{x}, \bar{y})$.)

13. (*Teorema de Weierstrass*). Seja $A \subset \mathbb{R}^2$, A compacto, e seja $f: A \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que f assume em A valor máximo e valor mínimo.

    (*Sugestão.* Veja Apêndice A1.4, volume 1.)

16.5. O Método dos Multiplicadores de Lagrange para Determinação de Candidatos a Extremantes Locais Condicionados

O objetivo desta seção é o estudo de máximos e mínimos de uma função sobre conjuntos do tipo:

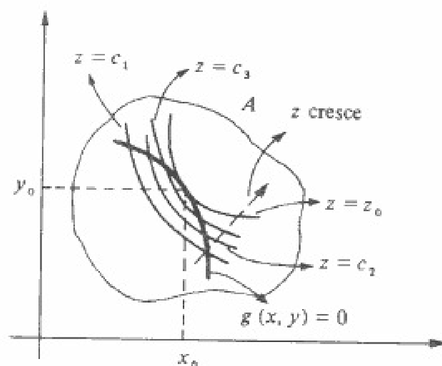
$$\{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}, \{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = 0\}$$

e

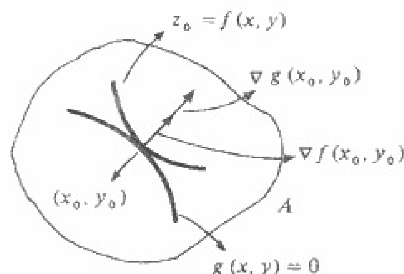
$$\{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$$

PROBLEMA 1. Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$, onde g é suposta de classe C^1 em A; suporemos, também, $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em B. Estamos interessados em determinar uma *condição necessária* para que $(x_0, y_0) \in B$ seja um extremante local da f em B. A figura que apresentamos a seguir, onde estão desenhadas algumas curvas de nível de f, ajudar-nos-á a chegar, geometricamente, a tal condição:

$z = f(x, y)$



Para efeito de raciocínio, suponhamos $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ e que z cresce no sentido indicado na figura ($c_1 < c_2 < c_3 < z_0$). Vamos então pensar geometricamente: se (x_0, y_0) é um extremante local, é razoável esperar que a curva de nível de f que passa por este ponto seja "tangente", neste ponto, à *restrição* $g(x, y) = 0$, isto é, os vetores $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ devem ser paralelos e como $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ deverá existir um λ_0 tal que



$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

Geometricamente, chegamos à seguinte condição necessária: *uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in B$ seja um extremante local de f em B é que (x_0, y_0) torne compatível o sistema*

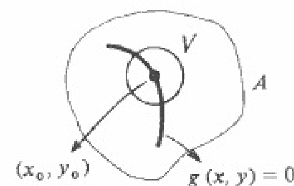
$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Este processo de se determinar candidatos a extremantes locais é conhecido como *método dos multiplicadores de Lagrange*; os λ que tornem tal sistema compatível denominam-se *multiplicadores de Lagrange* para o problema em questão.

> ***Teorema 1.*** Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$, onde g é suposta de classe C^1 em A, e $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$, para todo $(x, y) \in B$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in B$ seja extremante local de f em B é que exista um real λ_0 tal que
>
> $$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

Demonstração

Suponhamos que $(x_0, y_0) \in B$ seja um ponto de máximo local de f em B; isto significa que existe uma bola aberta V de centro (x_0, y_0) tal que



$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo $(x, y) \in B \cap V$. ($(x, y) \in B \cap V \Leftrightarrow g(x, y) = 0$ e $(x, y) \in V$).

Consideremos, agora, uma curva γ diferenciável num intervalo aberto I tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $t_0 \in I$, $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ $g(\gamma(t)) = 0$, para todo $t \in I$ (a existência de uma tal curva é garantida pelo teorema das funções implícitas). Da continuidade de γ segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in \,]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\; \Rightarrow \gamma(t) \in B \cap V.$$

Daí,

$$f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t_0))$$

para todo $t \in \,]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$; assim, t_0 é ponto de máximo local de $F(t) = f(\gamma(t))$ e como t_0 é ponto interior a I, resulta $F'(t_0) = 0$, ou seja,

① $$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Por outro lado, de $g(\gamma(t)) = 0$ em I resulta

② $$\nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Tendo em vista que $\nabla g(\gamma(t_0)) \neq \vec{0}$, segue de ① e ② que existe λ_0 tal que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda_0 \nabla g(\gamma(t_0)). \quad \blacksquare$$

Então, sendo $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$, onde g é suposta de classe C^1 em A e $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em B, os *candidatos a extremantes locais de f em B* são os $(x, y) \in A$ que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Estabelecemos assim uma condição necessária para um ponto (x_0, y_0) ser um extremante local de f em B. Trabalhando diretamente com a função o aluno deverá decidir quais dos candidatos encontrados são realmente extremantes locais.

Observação. Se no teorema 1 acrescentarmos as hipóteses f de classe C^1 e $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, então poderemos afirmar que a curva de nível de f que passa pelo ponto (x_0, y_0) tangencia, neste ponto, a restrição $g(x, y) = 0$. Entretanto, nada podemos afirmar com relação a tangência se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (veja Exercícios 1 (*f*) e 1 (*g*)).

EXEMPLO 1. Determine os extremantes de $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Solução

Seja $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; o que queremos são os extremantes de f em $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ em B, resulta que os candidatos a extremantes locais são os (x, y) que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (3, 2) = \lambda (2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Como $\lambda \neq 0$, das duas primeiras equações resultam

$$x = \frac{3}{2\lambda} \text{ e } y = \frac{1}{\lambda}.$$

Substituindo estes valores em $x^2 + y^2 = 1$, vem

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \text{ ou } \lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Segue que $\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ e $\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ são os candidatos a extremantes locais. Como B é compacto e $f\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right) > f\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$, resulta que $\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ é ponto de máximo e $\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ é ponto de mínimo de f em B. (Interprete geometricamente.)

EXEMPLO 2. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função $f(x, y) = y + x^3$ com a restrição $y - x^3 = 0$.

Solução

$$g(x, y) = y - x^3 \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}.$$

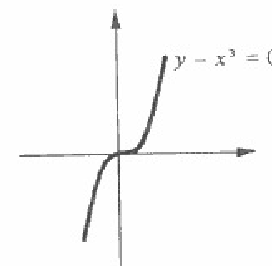
Como g é de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (-3x^2, 1) \neq (0, 0)$ em B, resulta que os candidatos a extremantes locais são os (x, y) que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (3x^2, 1) = \lambda (-3x^2, 1) \\ y - x^3 = 0. \end{cases}$$

O único candidato é $(0, 0)$ que não é extremante de f em B, pois $f(x, y) > 0$ para $x > 0$ e $y > 0$ e $f(x, y) < 0$ para $x < 0$ e $y < 0$.



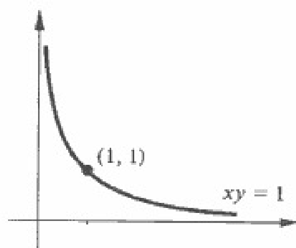
EXEMPLO 3. Encontre o ponto da curva $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$ que se encontra mais próximo da origem.

Solução

Trata-se aqui de se determinar o mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ com a restrição $xy = 1$ ($f(x, y)$ é o quadrado da distância de (x, y) a $(0, 0)$).

$$\begin{cases}\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)\\ g(x, y) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x, 2y) = \lambda(y, x)\\ xy - 1 = 0\end{cases}$$

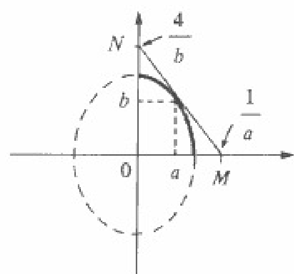
O único candidato é (1, 1) e, por inspeção, verifica-se que (1, 1) é ponto de mínimo. Assim, (1, 1) é o ponto da curva $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$ que se encontra mais próximo da origem.



EXEMPLO 4. Determine a reta tangente à curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$ e $y > 0$ que forma com os eixos triângulo de área mínima.

Solução

Seja (a, b) $(a > 0$ e $b > 0)$ um ponto da elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. A equação da reta tangente em (a, b) é:



$$\left(2a, \frac{b}{2}\right) \cdot [(x, y) - (a, b)] = 0$$

ou

$$ax + \frac{by}{4} = 1.$$

A área do triângulo $0MN$ é: $A = \frac{2}{ab}$. O problema consiste em minimizar $A = \frac{2}{ab}$ com a restrição $a^2 + \frac{b^2}{4} = 1$.

$$\begin{cases}\left(-\frac{2}{a^2b}, -\frac{2}{ab^2}\right) = \lambda\left(2a, \frac{b}{2}\right)\\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 1\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}-\frac{1}{a^3b} = \lambda\\ -\frac{4}{ab^3} = \lambda\\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 1.\end{cases}$$

Das duas primeiras equações segue $b = 2a$. Substituindo na última equação obtemos $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A equação da reta que resolve o problema é:

$$2x + y = 2\sqrt{2}.$$

PROBLEMA 2. Seja $f(x, y, z)$ diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja $B = \{(x, y, z) \in A \mid g(x, y, z) = 0\}$, onde g é suposta de classe C^1 em A e $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ em B. Qual uma *condição necessária* para que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja extremante local da f em B? Raciocinando geometricamente, como no Problema 1, chega-se à condição: a *condição necessária* para $(x_0, y_0, z_0) \in B$ ser extremante local de f em B é que exista λ_0 tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Deixamos para o leitor a prova desta afirmação. Deste modo, os candidatos a extremantes locais de f em B são os $(x, y, z) \in A$ que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases}\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)\\ g(x, y, z) = 0\end{cases}$$

EXEMPLO 5. Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ cuja soma das coordenadas seja máxima.

Solução

Queremos maximizar $f(x, y, z) = x + y + z$ com a restrição $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

$$\begin{cases}\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)\\ g(x, y, z) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1, 1, 1) = \lambda(2x, 4y, 6z)\\ \underbrace{x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1}_{g(x, y, z)} = 0.\end{cases}$$

Como λ deve ser diferente de zero, da 1.ª equação tiramos: $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{4\lambda}$ e $z = \frac{1}{6\lambda}$. Substituindo na última equação obtemos:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} + \frac{3}{36\lambda^2} = 1 \text{ ou } \lambda = \pm\sqrt{\frac{11}{24}}.$$

Os candidatos a extremantes são:

$$X_1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right) \text{ e } X_2 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right)$$

Da compacidade de B, da continuidade de f e de $f(X_1) > f(X_2)$ segue que o ponto procurado é

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right).$$

O próximo teorema fornece-nos uma condição necessária para (x_0, y_0, z_0) ser um extremante local de $f(x, y, z)$ com as restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$. Para a demonstração de tal teorema vamos precisar do seguinte resultado (cuja prova fica para o leitor): sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{c}$ vetores do $\mathbb{R}^3$ tais que $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{c} = 0$ e $\vec{w} \cdot \vec{c} = 0$; então existem reais λ_1 e λ_2 tais que $\vec{w} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$.

> ***Teorema 2.*** Seja $f(x, y, z)$ diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja $B = \{(x, y, z) \in A \mid g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$, onde g e h são supostas de classe C^1 em A e $\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) \neq \vec{0}$ em B. Nestas condições, uma condição necessária para que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja extremante local de f em B é que existam reais λ_1 e λ_2 tais que
>
> $$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

Demonstração

Suponhamos que (x_0, y_0, z_0) seja ponto de máximo local de f em B, o que significa que existe uma bola aberta V de centro (x_0, y_0, z_0) tal que, para todo $(x, y, z) \in B \cap V$,

$$f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$$

(como A é aberto, podemos supor $V \subset A$). Consideremos uma curva diferenciável $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo aberto, tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e $\gamma(t) \in B$ para todo t em I (a existência de uma tal curva é garantida pelo teorema das funções implícitas). Da continuidade de γ, segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\Rightarrow \gamma(t) \in B \cap V.$$

Assim, para todo $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ tem-se

$$f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t_0)).$$

Logo, t_0 é ponto de máximo local de $F(t) = f(\gamma(t))$ e daí $F'(t_0) = 0$, ou seja,

① $$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Por outro lado, de $\gamma(t) \in B$ para todo $t \in I$ segue que

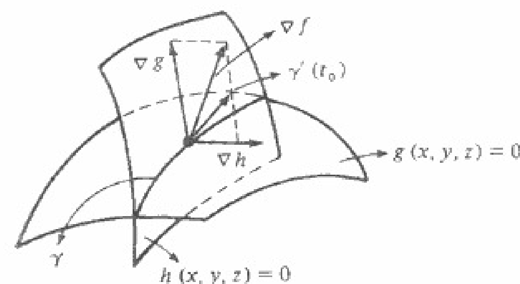
$$g(\gamma(t)) = 0 \text{ e } h(\gamma(t)) = 0,$$

para todo t em I; daí

② $$\nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0 \text{ e } \nabla h(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

De ① e ②, tendo em vista que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e $\nabla g(\gamma(t_0)) \wedge \nabla h(\gamma(t_0)) \neq \vec{0}$, resulta que existem reais λ_1 e λ_2 tais que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda_1 \nabla g(\gamma(t_0)) + \lambda_2 \nabla h(\gamma(t_0)).$$



EXEMPLO 6. Determine os pontos mais afastados da origem e cujas coordenadas estão sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

Solução

Trata-se de determinar os pontos que maximizam a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ($f(x, y, z)$ é o quadrado da distância de (x, y, z) a $(0, 0, 0)$) com as restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, onde $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$. Temos:

$$\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 8y & 2z \end{vmatrix} \neq \vec{0} \text{ em } B$$

(verifique). Estamos indicando por B o conjunto $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1 \text{ e } x^2 + 4y^2 + z^2 = 4\}$. Observe que B é compacto. Os candidatos a extremantes locais são os (x, y, z) que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda + 2\mu x \\ 2y = \lambda + 8\mu y \\ 2z = \lambda + 2\mu z \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - \mu) = \lambda & ① \\ 2y(1 - 8\mu) = \lambda & ② \\ 2z(1 - \mu) = \lambda & ③ \\ x + y + z = 1 & ④ \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 & ⑤ \end{cases}$$

De ① e ③ segue

$$2x(1-\mu) = 2z(1-\mu).$$

Para $\mu \neq 1$, $x = z$. Substituindo em ④ e ⑤

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 2y^2 = 2. \end{cases}$$

$$x^2 + 2(1-2x)^2 = 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9}.$$

Temos, então os candidatos: $(0, 1, 0)$ e $\left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Para $\mu = 1$, teremos $\lambda = 0$. Segue de ② que $y = 0$; substituindo em ④ e ⑤

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + (1-x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Segue que $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ são outros candidatos a extremantes. Como f é contínua e B compacto, basta comparar os valores de f nos pontos encontrados:

$$f(0, 1, 0) = 1, f\left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) = \frac{171}{81},$$

$$f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = 4 = f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right).$$

Conclusão. $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ são os pontos mais afastados da origem. Por outro lado, $(0, 1, 0)$ é o mais próximo da origem.

Exercícios 16.5

1. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas.
   a) $f(x, y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 = 1$
   b) $f(x, y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$
   c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ e $3x + y = 1$
   d) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ e $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$
   e) $f(x, y) = xy$ e $x^2 + 4y^2 = 8$
   f) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ e $x + 2y - 1 = 0$
   g) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$
   h) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$
   i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ e $x + 2y = 3$
   j) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $x^2 + 2y^2 = 1$
2. Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$. Qual o ponto de tangência?
3. Determine o ponto da reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máximo.
4. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$.
5. Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.
6. Determine a superfície de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ que seja tangente ao plano $x + 2y + 3z = 4$. Qual o ponto de tangência?

7. Ache o valor máximo e o valor mínimo da função $f(x, y, z) = x + 2y + z$ com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.
8. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.
9. Determine o ponto da reta

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

que se encontra mais próximo da origem.

10. Maximize $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.
11. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ (de centro na origem) mais próximos e os mais afastados da origem. Desenhe a elipse.
12. Encontre o ponto da curva $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ mais próximo da origem.
13. Encontre os pontos da curva $x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0$ mais próximos da origem. Desenhe a curva.
14. Determine o ponto da superfície $xyz = 1$, $x > 0$ e $y > 0$ que se encontra mais próximo da origem.
15. Pede-se determinar três números positivos cuja soma seja 36 e cujo produto seja máximo.
16. Determine, entre os triângulos de mesmo perímetro, o de área máxima.

    (*Sugestão.* Utilize a fórmula $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ que fornece a área do triângulo em função dos lados a, b e c, onde p é o semiperímetro.)

17. Verifique que $\left(\frac{c}{3}\right)^3$ é o valor máximo de xyz, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$, com a restrição $x + y + z = c$ $(c \geqslant 0)$. Conclua que a média geométrica de três números positivos é sempre menor ou igual à média aritmética destes números.
18. Determine, entre os paralelepípedos-retângulos de mesmo volume, o de área máxima.
19. Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com 1 m^3 de volume e com a forma de um paralelepípedo-retângulo. O material a ser utilizado na confecção do fundo custa o dobro do que será utilizado nas laterais. Determinar as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.
20. Deseja-se construir um paralelepípedo-retângulo com área total 100 cm^2. Determine as dimensões para o volume ser máximo.
21. Determine o paralelepípedo-retângulo de volume máximo, com arestas paralelas aos eixos, inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

22. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com três de suas faces nos planos coordenados, contido no tetraedro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z \leqslant 12, x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } z \geqslant 0\}$.
23. A temperatura T em qualquer ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T = 100x^2yz$. Determine a temperatura máxima sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$. Qual a temperatura mínima?
24. Determine o plano tangente à superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$, que forma com os planos coordenados tetraedro de volume mínimo.
25. Determine P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e Q na reta $x + y = 4$ de modo que a distância de P a Q seja a menor possível.

26. Considere a forma quadrática $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ onde a, b, c são constantes não simultaneamente nulas. Seja $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Suponha que (x_0, y_0, λ_0) seja solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla Q(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Prove que $Q(x_0, y_0) = \lambda_0$.

(*Sugestão*. Como Q é homogênea de grau 2, utilize a relação de Euler. Veja Exercício 26 da Seç. 12.1.)

27. Sejam $Q(x, y)$ e $g(x, y)$ como no exercício anterior. Suponha que os multiplicadores de Lagrange associados ao problema

$$\begin{cases} \nabla Q(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

sejam estritamente positivos. Prove que $Q(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

(*Sugestão*. Utilize o Exercício 26.)

28. Prove que os multiplicadores de Lagrange associados ao problema do exercício anterior são as raízes da equação

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

29. Sejam $Q(x, y)$ e $g(x, y)$ como no Exercício 26. Sejam λ_1 e λ_2, $\lambda_1 \leq \lambda_2$, as raízes da equação

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Prove que λ_1 e λ_2 são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de Q sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

16.6. Exemplos Complementares

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto A do $\mathbb{R}^2$. Suponha que $(x_0, y_0) \in A$ seja um ponto crítico de f. Prove que uma condição necessária para (x_0, y_0) ser um ponto de mínimo local de f é que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\, k^2 \geq 0$$

para todo (h, k).

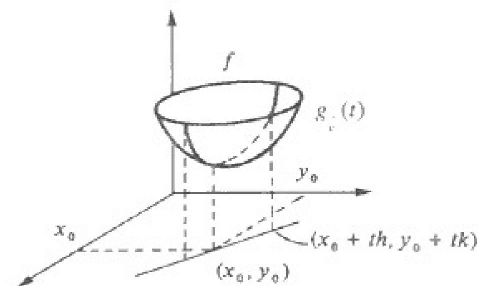
Solução

Seja $\vec{v} = (h, k) \neq (0, 0)$ e consideremos a função

$$g_{\vec{v}}(t) = f(x_0 + hk, y_0 + kt).$$

Suponhamos que (x_0, y_0) seja ponto de mínimo local de f; então $t = 0$ será ponto de mínimo local de $g_{\vec{v}}$ e, portanto, deveremos ter necessariamente $g''_{\vec{v}}(0) \geq 0$. Como

$$g''_{\vec{v}}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\, k^2$$



(verifique) resulta que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\, k^2 \geq 0$$

para todo (h, k), é uma condição necessária para (x_0, y_0) ser ponto de mínimo local de f.

Observação. Note que $g_{\vec{v}}$ fornece os valores que f assume sobre o trecho da reta $(x, y) = (x_0, y_0) + t(h, k)$ contido em D_f.

EXEMPLO 2. Considere a *forma quadrática*

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

onde a, b e c são constantes. Suponha $a \neq 0$. Verifique que

$$Q(h, k) = a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} k^2.$$

Solução

$$ah^2 + 2bhk + ck^2 = a\left[h^2 + 2\frac{b}{a}hk + \frac{c}{a}k^2\right] =$$

$$= a\left[h^2 + \frac{2b}{a}hk + \frac{b^2}{a^2}k^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{c}{a}k^2\right] =$$

$$= a\left[\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}k^2\right],$$

ou seja,

$$Q(h, k) = a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} k^2.$$

EXEMPLO 3. Considere a forma quadrática

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2.$$

Prove:

(i) se $a > 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$, então $Q(h, k) > 0$, para todo $(h, k) \neq (0, 0)$.

(ii) se $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0$, então existem (h_1, k_1) e (h_2, k_2) tais que $Q(h_1, k_1) < 0$ e $Q(h_2, k_2) > 0$.

Solução

Pelo Exemplo 2, sendo $a \neq 0$,

$$Q(h, k) = a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a}k^2.$$

(i) imediata.
(ii) se $a = 0$, teremos necessariamente $b \neq 0$; neste caso, existe α tal que $Q(\alpha, 1)$ e $Q(\alpha, -1)$ terão sinais contrários. (Verifique.) Se $a \neq 0$, $Q(1, 0)$ e $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right)$ terão sinais contrários $\left(Q(1, 0) = a \text{ e } Q\left(\frac{b}{a}, -1\right) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a}\right)$.

EXEMPLO 4. Seja $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto A do $\mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$ um ponto crítico de f. Prove que se

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$$

então (x_0, y_0) não é extremante local de f.

Solução

Seja

$$g_{\vec{v}}''(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) \; (\vec{v} = (h, k)).$$

Pela regra da cadeia,

$$g_{\vec{v}}''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2.$$

Pelo Exemplo 3 (ii)

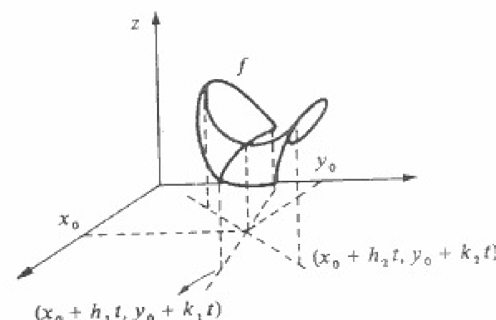
$\left(a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ e } c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right)$ existem

$$\vec{v_1} = (h_1, k_1) \quad \text{e} \quad \vec{v_2} = (h_2, k_2)$$

tais que

$$g''_{\vec{v_1}}(0) < 0 \quad \text{e} \quad g''_{\vec{v_2}}(0) > 0.$$

Assim, $t = 0$ é ponto de máximo local de $g_{\vec{v_1}}(t)$ e ponto de mínimo local de $g_{\vec{v_2}}(t)$. Logo, (x_0, y_0) não é extremante local de f.



Seja $(x_0, y_0) \in D_f$ um ponto crítico de f. Dizemos que (x_0, y_0) é *ponto de sela* de f se em toda bola aberta de centro (x_0, y_0) existirem pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) com $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$ e $f(x_2, y_2) > f(x_0, y_0)$.

Seja $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto A de $\mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in A$ um ponto crítico de f. Segue do Exemplo 4 que se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) será ponto de sela de f (verifique).

EXEMPLO 5. Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f. Suponha que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f. Prove:

a) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de mínimo local de f.

b) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo local de f.

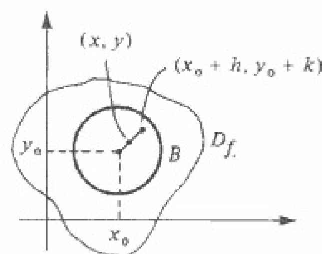
Solução

a) Da hipótese e da continuidade das funções

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \text{ e } H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

segue, pelo teorema da conservação do sinal, que existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) (podemos supor $B \subset D_f$, pois (x_0, y_0) é ponto interior de D_f) tal que, para todo (x, y) em B,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0 \text{ e } H(x, y) > 0.$$



Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange (veja teorema de 15.4), para todo (h, k), com $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$, existe $(\vec{x}, \vec{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})\, h^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\bar{x}, \bar{y})\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})\, k^2\right]$$

$$\left[\text{lembre-se de que } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \text{ pois } (x_0, y_0) \text{ é ponto crítico de } f\right].$$

Como $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \text{ e } H(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} > 0;$$

tendo em vista o Exemplo 3, para todo $(h, k) \neq (0, 0)$, com $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0,$$

ou seja,

$$f(x, y) > f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) em B, com $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Portanto (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f.
b) Fica a seu cargo. [Basta verificar que (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de $g(x, y) = -f(x, y)$].

EXEMPLO 6. Sejam α, β, γ, δ, ϵ e φ números reais dados. Considere a *forma quadrática*

$$Q(r, s, t) = \alpha r^2 + \beta s^2 + \gamma t^2 + 2\delta rs + 2\epsilon rt + 2\varphi st.$$

Supondo $\alpha \neq 0$, verifique que

$$Q(r, s, t) = \alpha\left[r + \frac{\delta}{\alpha}s + \frac{\epsilon}{\alpha}t\right]^2 + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}{\alpha}\left[s + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}\, t\right]^2 + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}\, t^2.$$

Solução

$$Q(r, s, t) = \alpha\left[r^2 + \frac{\beta}{\alpha}s^2 + \frac{\gamma}{\alpha}t^2 + \frac{2\delta}{\alpha}rs + \frac{2\epsilon}{\alpha}rt + \frac{2\varphi}{\alpha}st\right] =$$

$$= \alpha\left[r^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2}s^2 + \frac{\epsilon^2}{\alpha^2}t^2 + \frac{2\delta}{\alpha}rs + \frac{2\epsilon}{\alpha}rt + \right.$$

$$\left. + \frac{2\epsilon\delta}{\alpha^2}st - \frac{\delta^2}{\alpha^2}s^2 - \frac{\epsilon^2}{\alpha^2}t^2 - \frac{2\epsilon\delta}{\alpha^2}st + \frac{2\varphi}{\alpha}st + \frac{\beta}{\alpha}s^2 + \frac{\gamma}{\alpha}t^2\right].$$

Assim,

$$Q(r, s, t) = \alpha\left[\left(r + \frac{\delta}{\alpha}s + \frac{\epsilon}{\alpha}t\right)^2 + \frac{\alpha\beta - \delta^2}{\alpha^2}s^2 + \frac{\alpha\gamma - \epsilon^2}{\alpha^2}t^2 + \frac{2(\alpha\varphi - \epsilon\delta)}{\alpha^2}st\right]$$

$$= \alpha\left(r + \frac{\delta}{\alpha}s + \frac{\epsilon}{\alpha}t\right)^2 + \underbrace{\frac{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}{\alpha}s^2 + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma\end{vmatrix}}{\alpha}t^2 + \frac{2\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi\end{vmatrix}}{\alpha}st}_{\bar{Q}(s, t)}.$$

Supondo $\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix} \neq 0$,

$$\bar{Q}(s, t) = \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}{\alpha}\left[s^2 + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}t^2 + \frac{2\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}st\right] =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}{\alpha}\left[s^2 + 2\frac{\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}st + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}^2}t^2 - \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}^2}t^2 + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}t^2\right] =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}{\alpha}\left[\left(s + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}}t\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}\alpha & \delta \\ \delta & \beta\end{vmatrix}^2}t^2\right].$$

Como,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2 = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix} \text{(verifique)}$$

resulta

$$Q(r, s, t) = \alpha\left(r + \frac{\delta}{\alpha}s + \frac{\epsilon}{\alpha}t\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha}\left(s + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}t\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}t^2.$$

EXEMPLO 7. Considere a forma quadrática

$$Q(r, s, t) = \alpha r^2 + \beta s^2 + \gamma t^2 + 2\delta rs + 2\epsilon rt + 2\varphi st.$$

Verifique:

a) Se $\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} > 0$ e $\alpha > 0$, então

$$Q(r, s, t) > 0, \text{ para todo } (r, s, t) \neq (0, 0, 0).$$

b) Se $\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix} < 0$, $\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} > 0$ e $\alpha < 0$, então

$$Q(r, s, t) < 0, \text{ para todo } (r, s, t) \neq (0, 0, 0).$$

c) Se $\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} < 0$ e $\alpha > 0$, então existem (r_1, s_1, t_1) e (r_2, s_2, t_2) tais que $Q(r_1, s_1, t_1) < 0$ e $Q(r_2, s_2, t_2) > 0$.

Solução

a) e *b*) são conseqüências imediatas do Exemplo 6.

c) $Q(1, 0, 0) = \alpha$ e $Q\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha}$; assim, $Q(1, 0, 0)$ e $Q\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right)$ têm sinais contrários. [Sugerimos ao leitor determinar outras situações que levam à existência de (r_1, s_1, t_1) e (r_2, s_2, t_2) com $Q(r_1, s_1, t_1) < 0$ e $Q(r_2, s_2, t_2) > 0$.]

Deixamos a cargo do leitor a demonstração do resultado que aparece no Exercício 15 da Seç. 16.3.

(*Sugestão*. Proceda como no Exemplo 5.)

Apêndice

Funções de uma Variável Real a Valores Complexos

A.1. Funções de uma Variável Real a Valores Complexos

Uma função de *uma variável real a valores complexos* é uma função cujo domínio é um subconjunto de IR e cujo contradomínio é ℂ.

EXEMPLO 1. Considere a função f dada por $f(t) = t^2 + i \cos t$.

a) Qual o domínio?

b) Calcule $f(0)$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Solução

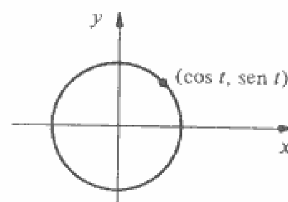
a) O domínio de f é IR.

b) $f(0) = i$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

EXEMPLO 2. Seja f dada por $f(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$. Desenhe a imagem de f.

Solução

Para cada t, $f(t)$ identifica-se com o ponto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. A imagem de f é a circunferência de centro na origem e raio 1:



Seja $f: A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{R}$, uma função de uma variável real a valores complexos; então existem, e são únicas, duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$, definidas em A e a valores reais, tais que $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, para todo $t \in A$. Pois bem, diremos que f é *contínua* em $t_0 \in A$ se e somente se f_1 e f_2 forem contínuas em t_0. Diremos, ainda, que f é *derivável* em t_0 se e somente se f_1 e f_2 forem deriváveis em t_0. Sendo f derivável em t_0, definimos a *derivada* de f em t_0 por

$$f'(t_0) = f_1'(t_0) + i f_2'(t_0).$$

Seja $f: A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{R}$; dizemos que $F: A \to \mathbb{C}$ é uma *primitiva* de f se $F'(t) = f(t)$, para todo $t \in A$. A notação $\int f(t)\,dt$ será usada para indicar a família das primitivas de f.

> ***Teorema.*** Seja $f: I \to \mathbb{C}$, onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$. Se $f'(t) = 0$, para todo $t \in I$, então existe uma constante complexa k tal que $f(t) = k$, para todo t em I.

Demonstração

Seja $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$. Segue da hipótese que $f_1'(t) = 0$ e $f_2'(t) = 0$ em I; assim, existem constantes reais k_1 e k_2 tais que, para todo $t \in I$,

$$f_1(t) = k_1 \quad \text{e} \quad f_2(t) = k_2.$$

Portanto, para todo $t \in I$,

$$f(t) = k_1 + ik_2. \quad \blacksquare$$

Como conseqüência deste teorema resulta que se $f: I \to \mathbb{C}$ e $g: I \to \mathbb{C}$, I intervalo, forem tais que $f'(t) = g'(t)$ em I, então existirá uma constante complexa k tal que, para todo t em I,

$$g(t) = f(t) + k.$$

De fato, pela hipótese, para todo t em I,

$$[g(t) - f(t)]' = 0$$

e, pelo teorema acima, existe uma constante k tal que, para todo t em I,

$$g(t) - f(t) = k.$$

EXEMPLO 3. Seja $f(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.

a) Calcule $f'(t)$.
b) Verifique que $f'(t) = if(t)$.

Solução

a) $f'(t) = [\cos t + i \operatorname{sen} t]' = -\operatorname{sen} t + i \cos t$.
b) $f'(t) = i^2 \operatorname{sen} t + i \cos t = i(\cos t + i \operatorname{sen} t) = if(t)$.

EXEMPLO 4. Seja $u(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$ onde α e β são constantes reais. Seja $\lambda = \alpha + i\beta$. Verifique que

$$\frac{du}{dt} = \lambda u.$$

Solução

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \alpha e^{\alpha t}[\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t] + e^{\alpha t}[-\beta \operatorname{sen} \beta t + i\beta \cos \beta t]\\ &= \alpha e^{\alpha t}[\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t] + \beta i e^{\alpha t}[\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t]\\ &= (\alpha + i\beta) e^{\alpha t}[\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t].\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{du}{dt} = \lambda u$.

Exercício

Sejam f e g duas funções a valores complexos, definidas e deriváveis num intervalo I. Prove que, para todo t em I, tem-se:

a) $[f(t) + g(t)]' = f'(t) + g'(t)$.
b) $[kf(t)]' = kf'(t)$, onde k é uma constante complexa.
c) $[f(t)\,g(t)]' = f'(t)\,g(t) + f(t)\,g'(t)$.
d) $\left[\dfrac{f(t)}{g(t)}\right]' = \dfrac{f'(t)\,g(t) - f(t)\,g'(t)}{[g(t)]^2}$ em todo $t \in I$, com $g(t) \neq 0$.

A.2. Definição de $e^{\lambda t}$, com λ complexo

Seja λ um número real; já vimos que $u(t) = e^{\lambda t}$ é a *única* função definida em $\mathbb{R}$ e que é solução do problema

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt} = \lambda u\\ u(0) = 1.\end{cases}$$

Suponhamos, agora, $\lambda = \alpha + i\beta$, onde α e β são constantes reais. Vamos mostrar a seguir que

$$u(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$$

é a *única* função de IR em $\mathbb{C}$ que é a solução do problema

① $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \lambda u \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

De fato, $u(0) = 1$. Pelo Exemplo 4 da seção anterior, $\dfrac{du}{dt} = \lambda u$. Deste modo a função $u(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$ é a solução de ①. Como $|u(t)| = e^{\alpha t}$, segue que $u(t) \neq 0$ em IR. Suponhamos, agora, que $v = v(t)$, $t \in$ IR, seja, também, solução de ①, isto é:

$$\begin{cases} v'(t) = \lambda v(t), \quad \text{para todo } t, \text{ e} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

Vamos mostrar que $v(t) = u(t)$ em IR. Temos:

$$\left[\frac{v(t)}{u(t)}\right]' = \frac{v'(t)\,u(t) - v(t)\,u'(t)}{[u(t)]^2} = \frac{\lambda v(t)\,u(t) - \lambda v(t)\,u(t)}{[u(t)]^2} = 0.$$

Assim, existe uma constante complexa k tal que, para todo t em IR,

$$\frac{v(t)}{u(t)} = k.$$

Como $v(0) = u(0) = 1$, resulta $k = 1$. Portanto,

$$v(t) = u(t) \text{ em IR.}$$

Fica provado que $u(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$ é a *única* função de IR em $\mathbb{C}$ satisfazendo ①.

Nada mais natural do que a seguinte definição.

Definição. Seja $\lambda = \alpha + i\beta$, com α e β reais. Definimos

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) \qquad \text{(relação de Euler)}$$

para todo t real.

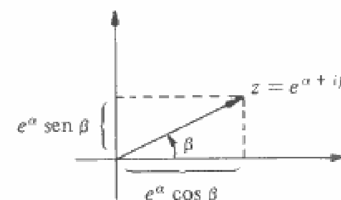
Fazendo $t = 1$ na definição acima resulta:

$$\boxed{e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)}$$

Se $\alpha = 0$

$$\boxed{e^{i\beta} = \cos \beta + i \operatorname{sen} \beta}$$

Seja $z = e^{\alpha + i\beta}$. Observe que $|z| = e^{\alpha}$ e que β é um argumento de z:



Seja λ uma constante complexa. Do que vimos anteriormente resulta:

$$\boxed{[e^{\lambda t}]' = \lambda e^{\lambda t}, \text{ para todo } t \text{ real.}}$$

O próximo exemplo mostra-nos que a propriedade

$$e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2}$$

é válida em $\mathbb{C}$.

EXEMPLO 1. Sejam λ_1 e λ_2 complexos dados. Mostre que

$$e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2}.$$

Solução

$u(t) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ é a única função de IR em $\mathbb{C}$ que satisfaz o problema

② $$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (\lambda_1 + \lambda_2)\,u \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Por outro lado, $v(t) = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}$, $t \in$ IR, também satisfaz ② (verifique). Portanto, para todo t real,

$$e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = e^{\lambda_1 t}\, e^{\lambda_2 t}.$$

Em particular, para $t = 1$,

$$e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2}.$$

EXEMPLO 2. Verifique que, para todo t real,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ e } \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Solução

① $$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t.$$
$$e^{-it} = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t)$$

ou seja,

② $$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t.$$

Somando membro a membro ① e ② resulta

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Subtraindo membro a membro ① e ② resulta

$$\operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Sendo $\lambda \neq 0$ uma constante complexa, de $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ segue

$$\boxed{\int e^{\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + k.}$$

EXEMPLO 3. Calcule:

a) $\int e^{it}\, dt$ *b)* $\int e^{t} \cos t\, dt.$

Solução

a) $\int e^{it}\, dt = \frac{1}{i} e^{it} + k.$

b) $$\int e^t \cos t\, dt = \int e^t \left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right] dt = \frac{1}{2}\int [e^{(1+i)t} + e^{(1-i)}]\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i} + \frac{e^{(1-i)t}}{1-i}\right] + k.$$

Ou seja,

$$\int e^t \cos t\, dt = \frac{1}{2} e^t \left[\frac{e^{it}}{1+i} + \frac{e^{-it}}{1-i}\right] + k.$$

Como $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ e $e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$, resulta:

$$\int e^t \cos t\, dt = \frac{1}{2} e^t \left[\frac{\cos t + i \operatorname{sen} t}{1+i} + \frac{\cos t - i \operatorname{sen} t}{1-i}\right] + k = \frac{1}{2} e^t [\cos t + \operatorname{sen} t] + k,$$

pois

$$\frac{\cos t + i \operatorname{sen} t}{1+i} + \frac{\cos t - i \operatorname{sen} t}{1-i} = \cos t + \operatorname{sen} t \text{ (verifique).}$$

EXEMPLO 4. Mostre que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \text{ e } \operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$$

Solução

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Por outro lado,

$$(e^{i\theta})^3 = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdot = e^{3i\theta}.$$

Segue que

$$e^{3i\theta} = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3.$$

Temos, também,

$$e^{3i\theta} = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta.$$

Assim,

③ $$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta.$$

Temos:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i \operatorname{sen}\theta) + 3\cos\theta(i \operatorname{sen}\theta)^2 + (i \operatorname{sen}\theta)^3,$$

ou seja,

④ $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + i[3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta]$. De ③ e ④ resulta:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

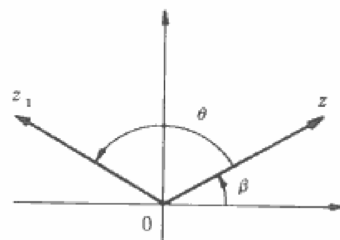
e

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$$

EXEMPLO 5. Sejam $z = e^{\alpha + i\beta}$, com $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, e θ um real com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Represente geometricamente z e $ze^{i\theta}$.

Solução

Para fixar o raciocínio, vamos supor $\frac{\pi}{2} < \theta + \beta < \pi$. Seja $z_1 = ze^{i\theta}$. Temos: $z_1 = e^{\alpha + i(\theta + \beta)}$.

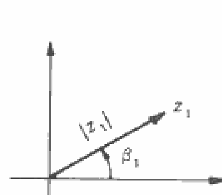


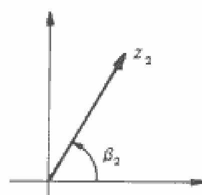
Os módulos de z e z_1 são iguais a e^{α}. O vetor Oz_1 é obtido de Oz por uma rotação de θ radiano, no sentido anti-horário.

EXEMPLO 6. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos com argumentos β_1 e β_2, respectivamente. Seja $z = z_1 \cdot z_2$.

a) Verifique que $|z| = |z_1||z_2|$.
b) Mostre que $\beta_1 + \beta_2$ é um argumento de z.

Solução





$z_1 = |z_1|(\cos\beta_1 + i\,\text{sen}\,\beta_1)$ $\quad$ $z_2 = |z_2|(\cos\beta_2 + i\,\text{sen}\,\beta_2)$

Como $e^{i\beta_1} = \cos\beta_1 + i\,\text{sen}\,\beta_1$ e $e^{i\beta_2} = \cos\beta_2 + i\,\text{sen}\,\beta_2$, resulta:

$$z_1 = |z_1|\,e^{i\beta_1} \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2|\,e^{i\beta_2}.$$

Portanto,

$$z = |z_1||z_2|\,e^{i(\beta_1+\beta_2)}$$

ou seja,

$$z = |z_1||z_2|[\cos(\beta_1+\beta_2) + i\,\text{sen}\,(\beta_1+\beta_2)].$$

Portanto,

a) $|z| = |z_1||z_2|$ $\qquad$ *b*) $\beta_1 + \beta_2$ é um argumento de z.

Sejam a um *número complexo* dado e $f: I \to \mathbb{C}$ uma função contínua dada, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. Consideremos a equação diferencial linear, de 1.ª ordem, com coeficiente constante,

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t).$$

Procedendo exatamente como na Seç. 5.1 obtemos a solução geral

$$x = ke^{-at} + e^{-at}\int e^{at} f(t)\,dt \;(k \in \mathbb{C}).$$

(Verifique.)

EXEMPLO 7. Resolva as equações:

a) $\dfrac{du}{dt} - iu = 0$ $\qquad$ *b*) $\dfrac{dx}{dt} + ix = k_1 e^{it}$ (k_1 constante)

Solução

a) Pela fórmula acima,

$$u = ke^{it} \quad (k \in \mathbb{C}).$$

b) $x = ke^{-it} + e^{-it}\int e^{it}k_1 e^{it}\,dt = ke^{-it} + k_1 e^{-it}\int e^{2it}\,dt.$

Ou seja,

$$x = ke^{-it} + k_1 e^{-it}\,\frac{e^{2it}}{2i}$$

ou ainda,

$$x = ke^{-it} + \frac{k_1}{2i}\,e^{it} \qquad (k \in \mathbb{C}).$$

EXEMPLO 8. Mostre que

$$x = Ae^{it} + Be^{-it} \;(A, B \in \mathbb{C})$$

é a solução geral de $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$

Solução

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \text{ é equivalente a}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}+ix\right]-i\left[\frac{dx}{dt}+ix\right]=0 \text{ (verifique).}$$

Fazendo $u = \dfrac{dx}{dt} + ix$ obtemos

$$\frac{du}{dt} - iu = 0$$

cuja solução geral é $u = k_1 e^{it}$. Assim,

$$\frac{dx}{dt} + ix = k_1 e^{it}$$

cuja solução geral é:

$$x = ke^{-it} + \frac{k_1}{2i} e^{it} \quad (k, k_1 \in \mathbb{C}).$$

Fazendo $A = \dfrac{k_1}{2i}$ e $B = k$ obtemos:

$$x = Ae^{it} + Be^{-it} \text{ (A, B} \in \mathbb{C}).$$

[Observe que i e $-i$ são as raízes da equação característica da equação dada.] Fazendo na solução acima, $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ e $e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$ obtemos:

$$x = A(\cos t + i \operatorname{sen} t) + b(\cos t - i \operatorname{sen} t) = \underbrace{(A+B)}_{A_1} \cos t + \underbrace{(Ai - Bi)}_{B_1} \operatorname{sen} t,$$

ou seja,

$$x = A_1 \cos t + B_1 \operatorname{sen} t \,(A_1, B_1 \in \mathbb{C}).$$

A.3. Equações Diferenciais Lineares, Homogêneas, de 2.ª Ordem, com Coeficientes Constantes

Consideremos a equação

① $$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0$$

onde a_1 e a_2 são números complexos dados. Sejam λ_1 e λ_2 ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$) as raízes da equação característica de ①. Procedendo exatamente como na demonstração do teorema da Seç. 5.2, obtemos os seguintes resultados:

a) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução geral de ① será

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{\lambda_2 t} \quad (A_1, B_1 \in \mathbb{C})$$

b) se $\lambda_1 = \lambda_2$, a solução geral de ① será

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 t e^{\lambda_2 t} \quad (A_1, B_1 \in \mathbb{C}).$$

EXEMPLO. Resolva a equação $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$.

Solução

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 + i \text{ ou } \lambda = -1 - i.$$

A solução geral é:

$$x = A_1 e^{(-1+i)t} + B_1 e^{(-1-i)t}$$

ou

$$x = e^{-t}[A_1 e^{it} + B_1 e^{-it}]\,(A_1, B_1 \in \mathbb{C}).$$

Lembrando que $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ e $e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$, resulta

$$x = e^{-t}\,[\underbrace{(A_1 + B_1)}_{A} \cos t + \underbrace{(iA_1 - iB_1)}_{B} \operatorname{sen} t],$$

ou seja,

$$\boxed{x = e^{-t}[A \cos t + B \operatorname{sen} t] \quad (A, B \in \mathbb{C}).}$$

Observação: Se a_1 e a_2 forem *reais* e se as raízes da equação $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ forem complexas, então tais raízes serão números complexos conjugados: $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Assim, a solução geral de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0$$

será

$$x = A_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + B_1 e^{(\alpha - i\beta)t}$$

ou

$$x = e^{\alpha t}[A_1 e^{i\beta t} + B_1 e^{-i\beta t}] \quad (A_1, B_1 \in \mathbb{C}).$$

Como $e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t$ e $e^{-i\beta t} = \cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t$ resulta:

$$x = e^{\alpha t}\,[(A_1 + B_1)\cos \beta t + (iA_1 - iB_1)\,\text{sen}\,\beta t]$$

ou

$$x = e^{\alpha t}\,[\,A\cos \beta t + B\,\text{sen}\,\beta t\,]\ (A, B \in \mathbb{C})$$

A.4. Equações Diferenciais Lineares, de 3.ª Ordem, com Coeficientes Constantes

Consideremos, inicialmente, a equação homogênea

$$\text{(I)}\qquad \frac{d^3x}{dt^3} + a_1\frac{d^2x}{dt^2} + a_2\frac{dx}{dt} + a_3x = 0$$

onde a_1, a_2, a_3 são constantes dadas. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação característica $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$. Temos:

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_1\\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = a_2 \ \text{(relações de Girard).}\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -a_3\end{cases}$$

Substituindo em (*I*) obtemos:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\frac{d^2x}{dt^2} + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\frac{dx}{dt} - \lambda_1\lambda_2\lambda_3x = 0$$

que é equivalente a:

$$\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\left[\frac{dx}{dt} - \lambda_3x\right]}_{u} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{dx}{dt} - \lambda_3x\right]}_{u} + \lambda_1\lambda_2\underbrace{\left[\frac{dx}{dt} - \lambda_3x\right]}_{u} = 0.$$

Segue que $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, será solução de (*I*) se e somente se $u = \frac{dx}{dt} - \lambda_3x$ for solução da equação linear de 2.ª ordem

$$\frac{d^2u}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{du}{dt} + \lambda_1\lambda_2u = 0.$$

Portanto, $x = x(t)$ será solução de (*I*) se e somente se

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_3x = A_1e^{\lambda_1 t} + B_1e^{\lambda_2 t} \qquad \text{se} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

ou

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_3x = A_1e^{\lambda_1 t} + B_1te^{\lambda_1 t} \qquad \text{se} \qquad \lambda_1 = \lambda_2$$

Deixamos a seu cargo concluir que a solução geral de (*I*) será:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + Ce^{\lambda_3 t} \quad \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ para } i \neq j,$$

ou

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t} + Ce^{\lambda_3 t} \quad \text{se} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3,$$

ou

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t} + Ct^2e^{\lambda_1 t} \quad \text{se} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

As equações lineares de 3.ª ordem, não-homogêneas, com coeficientes constantes, são tratadas do mesmo modo que as de 2.ª ordem. Fica a seu cargo estender os resultados até aqui obtidos para equações lineares, com coeficientes constantes, de ordem $n > 3$.

Respostas, Sugestões ou Soluções

CAPÍTULO 1

1.2

1. Sim, pois, é contínua.
2. Sim, pois, é contínua.
3. Sim, pois, é limitada e descontínua apenas em $x = 1$.
4. Sim, pois, é contínua em $[0, 1]$.
5. Sim, pois, é limitada e descontínua apenas em $x = 0$.
6. Não, pois, não é limitada em $\left[0, \dfrac{2}{\pi}\right]$.
7. Sim, pois, é limitada e descontínua apenas em $x = 0$.
8. Não, pois, não é limitada em $[-1, 1]$.

CAPÍTULO 2

2.1

1. *a)* $2 + \ln 2$ *b)* $\dfrac{11}{3}$

   c) $\dfrac{1}{2} \ln 5$ *d)* 1

2. *a)* $$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x 1\,dt & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 1\,dt + \int_1^x 0\,dt & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

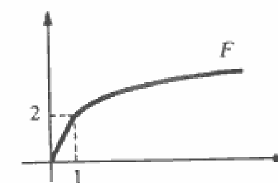
   b) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{3}$ se $-1 \leq x \leq 1$, $2x - \dfrac{4}{3}$ se $x > 1$.

   c) $$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x t^2\,dt & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^x 2\,dt & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - \dfrac{5}{3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

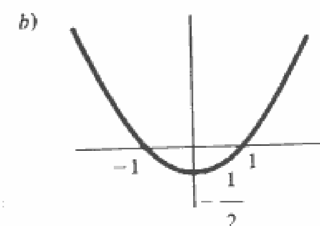
   d) x se $0 \leq x \leq 1$, $2x - 1$ se $1 \leq x \leq 2$ e $3x - 3$ se $x > 2$.

2.2

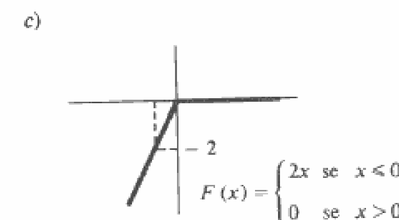
1. *a)* $F(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$



b)

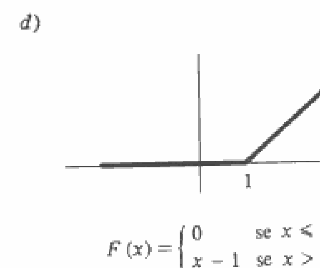


c)



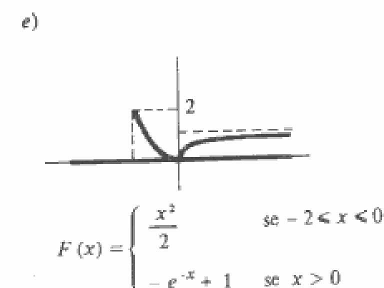
$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

d)



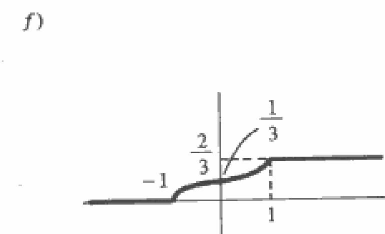
$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

e)

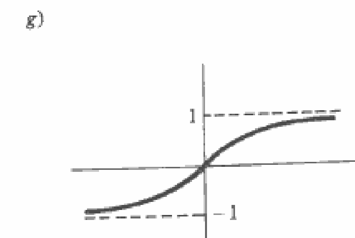


$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ -e^{-x} + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

f)



g)



2. *a)* $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ *b)* $F'(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

3. *a)* $x > 1$ *b)* $x < 1$

   c) $-2 < x < 2$ *d)* $x > 2$

4. *a)* $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3} & \text{se } x \leqslant 1;\\ \dfrac{1}{3}+2\ln x & \text{se } x>1\end{cases}$ $\quad F'(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } x<1\\ \dfrac{2}{x} & \text{se } x>1\end{cases}$

b) Não: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=1$ e $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=2$

5. *a)* $F(x)=x,\ x\in \mathbb{R};\ F'(x)=f(x)$ para $x\neq 1$
b) $F'(1)=1\neq f(1)$

2.4

1. *a)* $F'(x)=\dfrac{3x}{1+x^6}$ *b)* $F'(x)=\operatorname{sen} x^2$

c) $F'(x)=-\cos x^4$ *d)* $F'(x)=2x\operatorname{sen} x^4$

e) $F'(x)=2\cos 4x^2$ *f)* $F'(x)=\dfrac{3x^2}{5+x^{12}}-\dfrac{2x}{5+x^8}$

g) $F'(x)=3x^2\displaystyle\int_1^x e^{-s^2}\,ds+x^3e^{-x^2}$ *h)* $F'(x)=2x\displaystyle\int_0^x e^{-s^2}\,ds+x^2e^{-x^2}$

i) $F'(x)=-\operatorname{arc\,tg} x^3$ *j)* $F'(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

2. Crescente em $]-\infty,-2]$ e em $[0,+\infty[$; decrescente em $[-2,0]$.

3. $\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$

4. *Sugestão*: Verifique que $[F(x)-F(-x)]'=0$ em $[-r,r]$.

6. Integrando por partes: $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx=\left[x\int_1^x e^{-t^2}\,dt\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)\,dx.$

7. $\dfrac{1}{2}[\cos \pi^2-1]$

CAPÍTULO 3

3.1

1. *a)* $\dfrac{26\pi}{3}$ *b)* $\dfrac{21\pi}{8}$

c) $\dfrac{15\pi}{2}$ *d)* $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

e) $\dfrac{4\pi}{3}$ *f)* $\dfrac{17\pi}{2}$

g) $\dfrac{2\pi}{15}$ *h)* $4\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$

i) $\dfrac{44\pi}{15}$ *j)* $\dfrac{28\pi}{3}$

l) $\dfrac{\pi}{2}$ *m)* $4\pi^2$

3.2

1. *a)* $\pi\left[\dfrac{e^2+1}{2}\right]$ *b)* $\dfrac{768\pi}{7}$

c) $\dfrac{9\pi}{2}$ *d)* $2\pi^2$

e) $\dfrac{\pi(\pi-2)}{2}$ *f)* π^2

g) $\dfrac{\pi}{6}$ *h)* $\dfrac{44}{15}\pi$

3.3

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}r^3$ **2.** $\dfrac{\pi}{3}$

3. $\dfrac{1}{12}$ **4.** $\dfrac{l^3}{4}$.

3.4

1. *a)* $\dfrac{\pi}{2}[e^2+4-e^{-2}]$ *b)* $4\pi R^2$

c) $\dfrac{\pi}{32}\left[3\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ *d)* $\dfrac{\pi}{6}\left[17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right]$

2. *a)* $L(P)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$. Pelo TVM existe c_i em $]x_{i-1},x_i[$ tal que $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(c_i)\,\Delta x_i$ $L(P)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i$, logo, ...

3. *a)* $1+\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+e^2}}\right]$

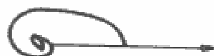
b) $1+\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+e^2}}\right]$

c) πR

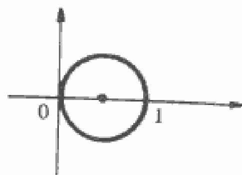
d) $\dfrac{1}{4}\left[2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right]$

3.5

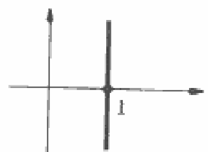
1\. *a*)



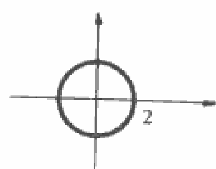
b)



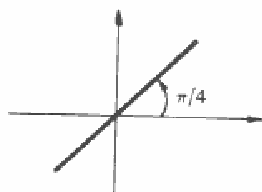
c)



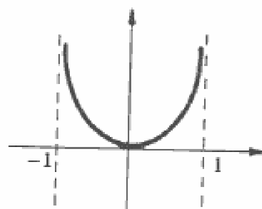
d)



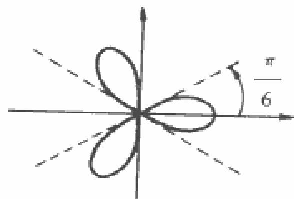
e)



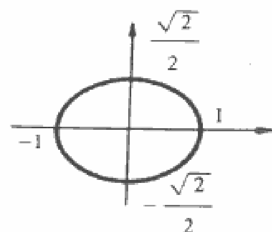
f)



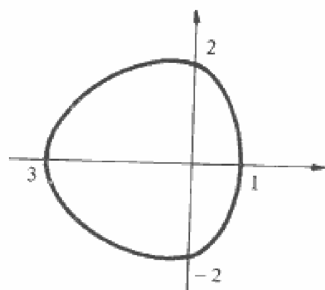
g)



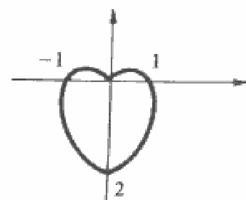
h)



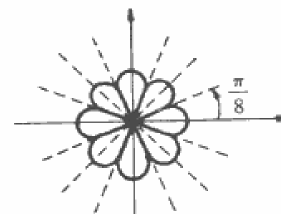
i)



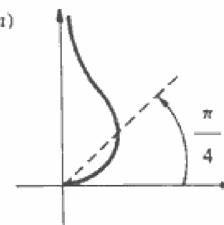
j)



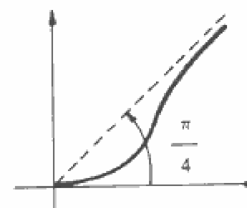
l)



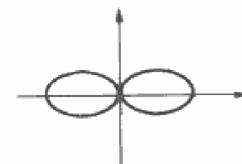
m)



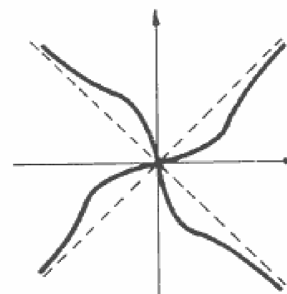
n)



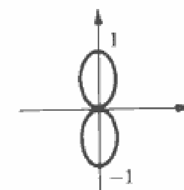
o)



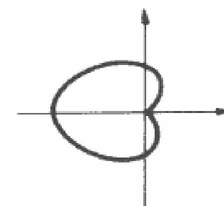
2\. *a*)



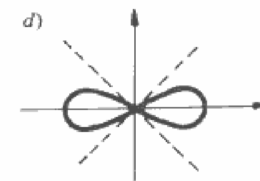
b)



c)



d)



3. *a*) $\frac{9\pi}{2}$ *b*) 1

c) $\frac{\pi}{2}$ *d*) $\frac{\pi}{4}$

4. *a*) área $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos\theta)^2 \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{5\pi}{2} - 3\sqrt{3}.$

b) $\frac{\pi - 2}{2}$ *c*) $7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$

d) $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\dfrac{8\pi}{3} - \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

5. $\text{área} = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \theta^2\, d\theta - \dfrac{1}{2}\int_0^1 \theta^4\, d\theta = \dfrac{1}{15}$

6. $\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} [2 \operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{tg} 2\theta]\, d\theta$

3.6

1. *a)* $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{7}\right)$ *b)* $\left(\dfrac{4}{3\pi}, \dfrac{2}{3\pi}\right)$

c) $\left(0, \dfrac{2}{3\pi}\right)$ *d)* $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{6}{15}\right)$

2. *a)* $\left(0, \dfrac{4}{\pi}\right)$ *b)* $\left(0, \dfrac{3\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{16\sqrt{2} + 16\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}\right)$

c) $\left(0, \dfrac{e^2 + 4 - e^{-2}}{4(e - e^{-1})}\right)$

5. *a)* $4\pi^2$ *b)* $2\pi^2$

6. π^2

7. *a)* $\left(0, \dfrac{5}{9}\right)$ *b)* $\dfrac{208\pi}{45}$

8. $2\sqrt{2}\,\pi^2$

CAPÍTULO 4

4.1

1. *a)* $\dfrac{1}{2}$ *b)* 1

c) $\dfrac{1}{s}$ *d)* $+\infty$

e) 1 *f)* $\dfrac{1}{s^2}$

g) $\dfrac{1}{2}$ *h)* $\dfrac{\pi}{2}$

i) $\dfrac{\pi}{2s}$ *j)* $\dfrac{1}{3}$

l) $+\infty$ *m)* $\dfrac{1}{2}\ln 3$

n) $\dfrac{\pi}{4}$ *o)* 3

p) $\dfrac{1}{2}$ *q)* $\dfrac{1}{2}\ln 2$

2. $+\infty$ se $\alpha \leq 1$; $\dfrac{1}{\alpha - 1}$ se $\alpha > 1$

3. *a)* 1 *b)* $-\dfrac{1}{4}$

c) $-\infty$ *d)* $-\dfrac{1}{2}$

e) 2 *f)* 2

g) $\dfrac{\pi}{2}$ *h)* 4

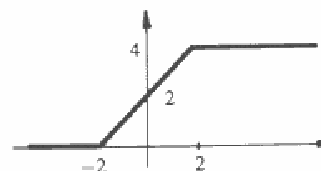
4. $m = \dfrac{1}{6}$ **5.** $k = -2$

6. $m = \dfrac{3}{2}$

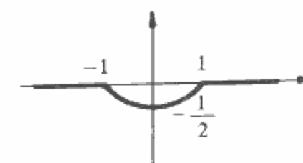
9. *a)* $\dfrac{1}{1+s^2} + \dfrac{3s}{4+s^2}$ *b)* $\dfrac{3}{s^2} + \dfrac{3}{s-3} + \dfrac{1}{(s-1)^2}$

4.2

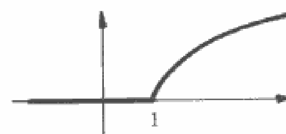
1.



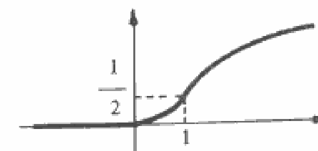
2.



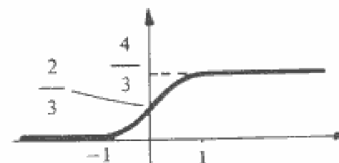
3.



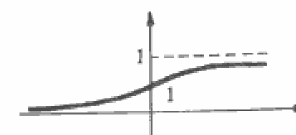
4.



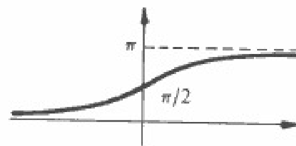
5.



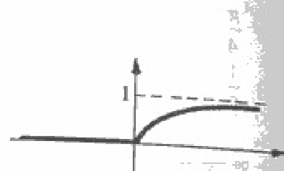
6.



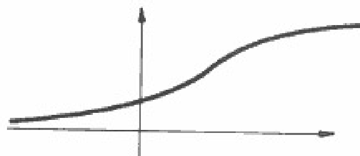
7.



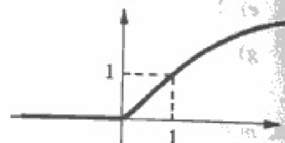
8.



9.



10.



4.3

1. a) $\frac{3}{2}$ b) $+\infty$
c) $\frac{2\sqrt{26}}{3}$ d) -1

3. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $2\sqrt{2}$
c) $+\infty$ d) 1

5. a) 0 b) $+\infty$

4.4

1. a) converge b) diverge
c) converge d) converge
e) converge f) converge
g) converge h) converge
i) converge j) converge
l) converge m) converge

3. a) diverge b) converge
c) converge d) diverge

6. $f(t) = \frac{10}{9} e^{-3t} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} t$

7. a) $\frac{12}{5} e^{2t} - \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} t$ b) $-\frac{4}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$

CAPÍTULO 5

5.1

1. a) $ke^{3t} - \frac{1}{2} e^t$ b) $ke^t - 2t - 3$
c) $ke^t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t$ d) $ke^{-2t} - \frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \operatorname{sen} t$
e) $e^{2t}[k + t]$ f) $ke^t - 5$
g) $ke^{-t} + \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{2}{5} \operatorname{sen} 2t$ h) $ke^{-2t} + \frac{1}{4}$
i) $y = ke^{-3x} + \frac{1}{3} x - \frac{1}{9}$ j) $s = ke^{2t} + te^{2t}$
l) $q = ke^{-t} + \frac{1}{10} \cos 3t + \frac{3}{10} \operatorname{sen} 3t$ m) $ke^x - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$
n) $y = ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$ o) $x = ke^{-\frac{1}{2}t} + t - 2$
p) $ke^{2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$ q) $T = ke^{3t} - \frac{2}{3}$
r) $y = ke^x - \frac{1}{10} \cos 3x + \frac{3}{10} \operatorname{sen} 3x$ s) $x = ke^{3t} + \frac{1}{4} e^{-t}$

2. $8p_0$, onde p_0 é a população no instante $t = 0$.

3. A equação que rege o resfriamento é $\frac{dT}{dt} = \alpha (T - 20)$, onde α é a constante de proporcionalidade. $T(t) = 90e^{\alpha t} + 20$ onde $\alpha = \frac{1}{20} \ln \frac{2}{3}$.

4. a) $i = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)$

b) $i = \frac{1}{1 + 576\pi^2} [e^{-5t} - 264\pi \cos 120\pi t + 11 \operatorname{sen} 120\pi t]$

5.2

1. a) $x = Ae^{3t} + Be^{-t}$ b) $x = e^t(A + Bt)$
c) $x = Ae^{2t} + Be^{-2t}$ d) $x = A + Be^{4t}$
e) $x = Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t}$ f) $x = e^{-t}(A + Bt)$
g) $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$ h) $y = e^{-3x}(A + Bx)$
i) $A + Be^{-5x}$ j) $y = Ae^{-\sqrt{6}x} + Be^{\sqrt{6}x}$
l) $x = A + Be^{-3t}$ m) $x = A + Bt$

$n)$ $x = Ae^{-t} + Be^{\frac{1}{2}t}$

$o)$ $x = A + Be^{-\frac{5}{3}t}$

2. $a)$ $x = \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-3t}$

$b)$ $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}$

$c)$ $y = (1 - x)e^{x}$

3. $a)$ $x = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t}$

$b)$ $x = Ae^{-2t} + Be^{-3t}$

$c)$ $y = A + Be^{7t}$

$d)$ $y = e^{5t}[A + Bt]$

4. A equação que rege o movimento da partícula é: $m\ddot{x} = -2\dot{x} - x$ *ou* $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$, pois, $m = 1$.

$a)$ $x(t) = e^{-t}(1 + t)$. Desenhe o gráfico.

$b)$ $x(t) = (1 - t)e^{-t}$. Desenhe o gráfico.

5. $x(t) = e^{1-2t} - e^{-t}$

5.3

1. $a)$ $a = -2$ e $b = 2$

$b)$ $a = -5$ e $b = 12$

$c)$ $a = \frac{3}{5}$ e $b = -\frac{1}{5}$

$d)$ $a = -\frac{1}{5}$ e $b = \frac{2}{5}$

$e)$ $a = -4$ e $b = 0$

$f)$ $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$

$g)$ $a = \frac{10}{13}$ e $b = \frac{15}{13}$

$h)$ $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

2. $a)$ $\pm i$

$b)$ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$c)$ $-1 \pm i$

$d)$ $-1 \pm \sqrt{2}\,i$

$e)$ $\pm wi$

$f)$ $\pm 2i$

$g)$ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$

$h)$ $\pm \sqrt{5}\,i$

$i)$ $\pm \sqrt{2}\,i$

$j)$ ± 2

$l)$ $2 \pm i$

5.4

1. $a)$ $e^{-t}(A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t)$

$b)$ $A\cos\sqrt{5}\,t + B\,\text{sen}\sqrt{5}\,t$

$c)$ $e^{-\frac{1}{2}t}(A\cos\sqrt{3}\,t + B\,\text{sen}\sqrt{3}\,t)$

$d)$ $Ae^{\sqrt{5}t} + Be^{-\sqrt{5}t}$

$e)$ $A\cos 3t + B\,\text{sen}\,3t$

$f)$ $e^{-t}(A\cos t + B\,\text{sen}\,t)$

$g)$ $e^{2t}(A + Bt)$

$h)$ $A + Be^{-5t}$

$i)$ $e^{-3t}(A\cos t + B\,\text{sen}\,t)$

$j)$ $e^{-\frac{1}{2}t}\left[A\cos\frac{\sqrt{11}}{2}t + B\,\text{sen}\frac{\sqrt{11}}{2}t\right]$

$l)$ $Ae^{5t} + Be^{t}$

$m)$ $e^{3t}(A + Bt)$

$n)$ $A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$

$o)$ $e^{-\frac{3}{2}t}\left[A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$

$p)$ $A\cos\sqrt{a}\,t + B\,\text{sen}\sqrt{a}\,t$

$q)$ $Ae^{\sqrt{-a}\,t} + Be^{-\sqrt{-a}\,t}$

$r)$ $e^{t}[A\cos\sqrt{5}\,t + B\,\text{sen}\sqrt{5}\,t]$

$s)$ $e^{-4t}[A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t]$

2. $a)$ $x = \frac{1}{2}\text{sen}\,2t$

$b)$ $-e^{-t}(\cos t + \text{sen}\,t)$

$c)$ $e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\sqrt{7}\,t + \frac{3\sqrt{7}}{14}\text{sen}\sqrt{7}\,t\right]$

$d)$ $-\cos t + 2\,\text{sen}\,t$

3. $\dot{x}(t) = -2\,\text{sen}\,2t - \cos 2t$

4. $x(t) = e^{-t}\,\text{sen}\,t$

5. $f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{1}{2}t}\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$

6. $x = e^{t}\,\text{sen}\,t$

7. $a)$ $c > 2$

$b)$ $c = 2$

$c)$ $0 < c < 2$

5.5

1. $a)$ $Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t} - \frac{1}{12}\cos 3t$

$b)$ $Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$

$c)$ $Ae^{t} + Bte^{t} + \frac{5}{2}t^2e^{t}$

$d)$ $Ae^{-t} + Be^{-3t} + \frac{8}{15}e^{2t}$

$e)$ $e^{-t}(A\cos t + B\,\text{sen}\,t) + 2$

$f)$ $A + Be^{-2t} + 2t$

$g)$ $A\cos t + B\,\text{sen}\,t - t\cos t$

$h)$ $Ae^{2t} + Be^{t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$

$i)$ $A + Be^{3t} - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t$

$j)$ $A\cos 3t + B\,\text{sen}\,3t + \frac{1}{8}\text{sen}\,t + \frac{1}{4}\cos t$

$l)$ $Ae^{-t} + Bte^{-t} - \frac{3}{25}\cos 2t + \frac{4}{25}\text{sen}\,2t$

$m)$ $A\cos 3t + B\,\text{sen}\,3t - \frac{1}{6}t\cos 3t$

$n)$ $Ae^{2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$

$o)$ $Ae^{2t} + Be^{-2t} - \frac{8}{5}\cos t$

$p)$ $A + Be^{2t} + \frac{2}{39}\cos 3t - \frac{1}{13}\text{sen}\,3t$

$q)$ $A + Be^{2t} - e^{t}$

$r)$ $A + Be^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}$

$s)$ $A + Be^{2t} - \frac{5}{2}t$

2. $A\cos wt + B\,\text{sen}\,wt - \frac{1}{2w}t\cos wt$

3. $a)$ $\frac{2}{3}\cos 2t + \frac{1}{3}\text{sen}\,2t + \frac{1}{3}\cos t$

$b)$ $te^{-3t}\left[1 + \frac{1}{2}t\right]$

$c)$ $\frac{1}{4}t\,\text{sen}\,2t$

$d)$ $-\frac{5}{13}\cos 2t - \frac{15}{26}\text{sen}\,2t + \frac{5}{13}e^{3t}$

4. $x_p = \frac{b}{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\gamma^2w^2}[-2\gamma w\cos wt + (w_0^2 - w^2)\,\text{sen}\,wt]$.

5. *Sugestão*: Considere os casos $w = w_0$ e $w \neq w_0$.

CAPÍTULO 6

6.3

1. $(x, y) = (1, 2) + \lambda(-1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
2. $(x, y) = (1, -1) + \lambda(2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\vec{u} = (-2, 3)$
4. $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) + \lambda(-2, 3), \lambda \in \mathbb{R}$
5. *a)* $\vec{u} = (2, 1)$ *b)* $\vec{u} = (-1, 1)$
   c) $\vec{u} = (5, 2)$ *d)* $\vec{u} = (-2, 1)$
6. *a)* $\vec{n} = (2, 1)$ *b)* $\vec{n} = (3, -1)$
   c) $\vec{n} = (1, 3)$ *d)* $\vec{n} = (2, -3)$
7. *a)* $(x, y) = (2, -5) + \lambda(1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ *b)* $(x, y) = (1, -2) + \lambda(-1, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
8. *a)* $(x, y) = (1, 2) + \lambda(2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ *b)* $(x, y) = (2, -2) + \lambda(1, 3), \lambda \in \mathbb{R}$
9. *a)* $(2, 1, 3) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = 0$ ou $2x + y + 3z = 6$
   b) $(-2, 1, 2) \cdot [(x, y, z) - (2, 1, -1)] = 0$ ou $2x - y - 2z = 5$
10. *a)* $(x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda(1, 2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
    b) $(x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(2, 1, 3), \lambda \in \mathbb{R}$
12. $(x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(3, 0, -3), \lambda \in \mathbb{R}$ (tal reta é paralela à direção de $\vec{u} \wedge \vec{v} = (3, 0, -3)$).
13. *a)* $\vec{u} \wedge \vec{v} = (5, -4, -3)$ *b)* $\vec{u} \wedge \vec{v} = (4, -2, 8)$
14. *a)* $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot [(x, y, z) - (1, 2, 1)] = 0$ ou $x - y + z = 0$
    b) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot [(x, y, z) - (0, 1, 2)] = 0$ ou $-4x + y + 3z = 7$

6.4

2. *a)* $\sqrt{5}$ *b)* $\sqrt{14}$
   c) $\sqrt{5}$ *d)* $\frac{\sqrt{13}}{6}$
3. $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \geq \sqrt{u_1^2} = |u_1|$ (veja: $u_2^2 + u_3^2 \geq 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geq u_1^2 \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \geq \sqrt{u_1^2}$). De modo análogo, tem-se: $\|\vec{u}\| \geq |u_2|$ e $\|\vec{u}\| \geq |u_3|$.
5. $\|\vec{u}\| = \|(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\|$, ou seja, $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$.
9. $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{v}) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = \alpha$, pois, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. De modo análogo, obtém-se $\vec{v} \cdot \vec{w} = \beta$.
12. Sejam α e β dois reais quaisquer tais que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Segue que $\vec{u} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{0}$; daí $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0$ e, portanto, $\alpha = 0$. Do mesmo modo, $\vec{v} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{0}$ e, portanto, $\alpha(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0$; logo, $\beta = 0$, pois, $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$. Fica provado, assim, que quaisquer que sejam os reais α e β, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \alpha = \beta = 0$. Portanto, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes.

17. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$, $0 \leq \theta \leq \pi$; $\text{sen}^2\,\theta = 1 - \dfrac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2}$;

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} =$$

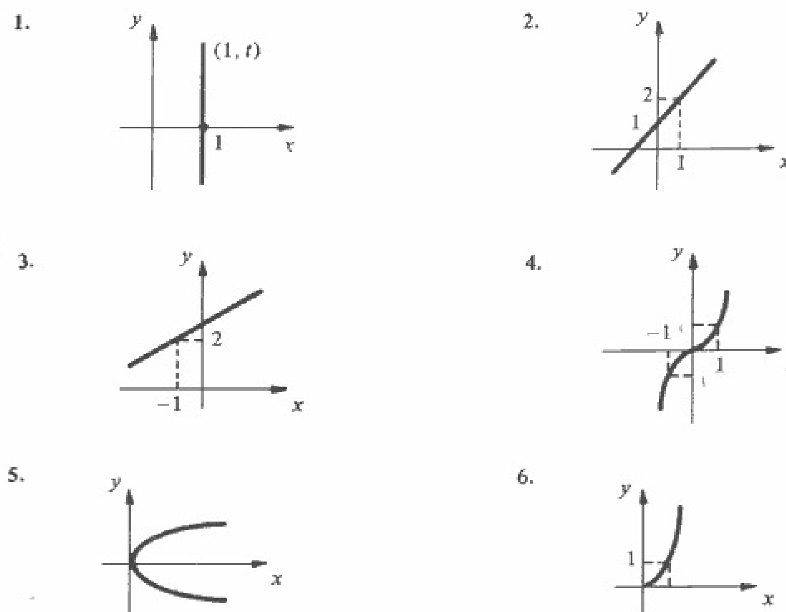
$$= \frac{\sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

6.5

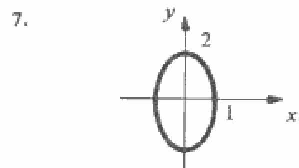
1. *a)* É aberto *b)* Não é aberto
   c) É aberto (conjunto vazio) *d)* Não é aberto
   e) É aberto (conjunto vazio) *f)* É aberto
   g) É aberto *h)* Não é aberto
2. *a)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ *b)* ϕ
   c) $\{(0, 1)\}$ *d)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 1 \leq y \leq 2\}$ *f)* $\mathbb{R}^2$
7. *a)* É fechado *b)* Não é fechado
   c) É fechado *d)* Não é fechado
   e) É fechado *f)* É fechado
   g) É fechado *h)* Não é fechado

CAPÍTULO 7

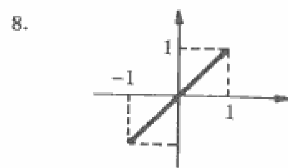
7.1



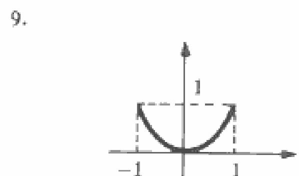
7.



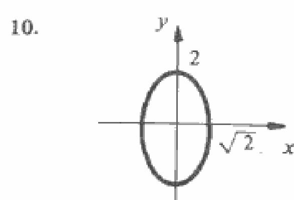
8.



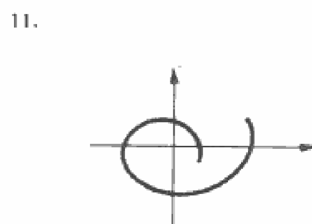
9.



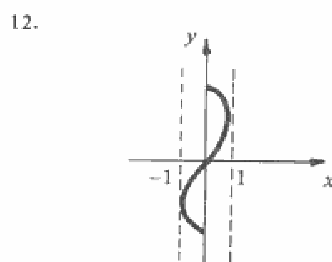
10.



11.

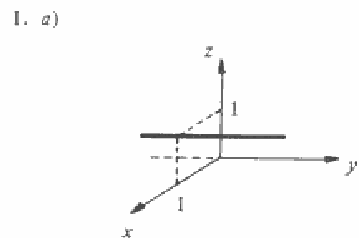


12.

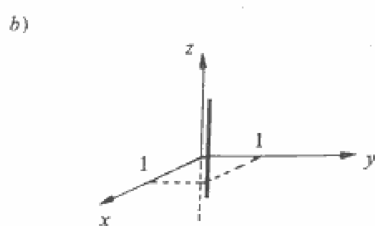


7.2

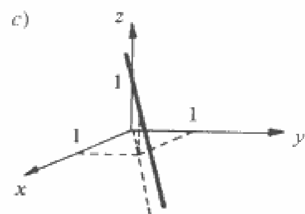
1. *a*)



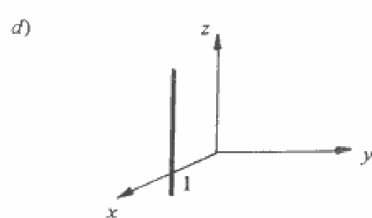
b)



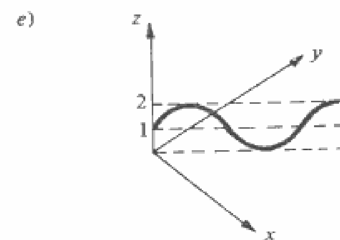
c)



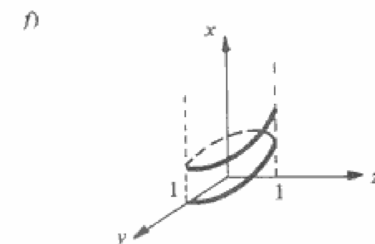
d)



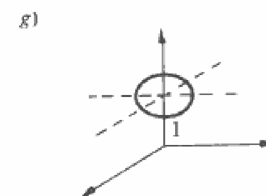
e)



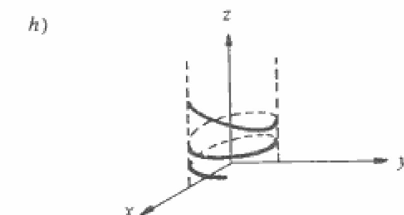
f)



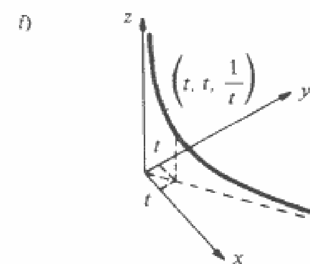
g)



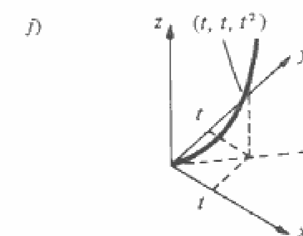
h)



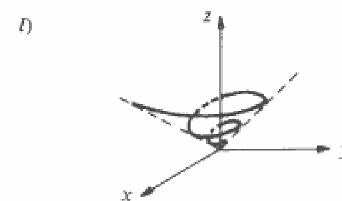
i)



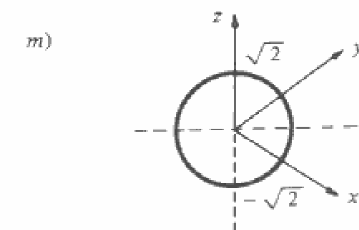
j)



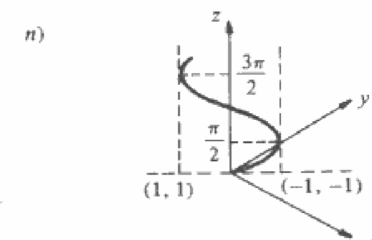
l)



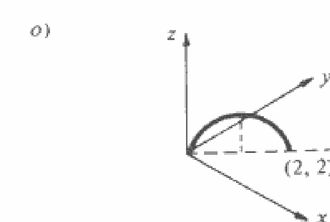
m)



n)



o)



2. *a)* $0 < t \leqslant 1$ *b)* $\left(\ln \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right)$

3. *a)* $-\sqrt{5} < t < -1$ ou $2 \leqslant t < \sqrt{5}$ *b)* $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}, t \neq 0$

7.3

1. *a)* $3t + t \operatorname{sen} t + 2t^2$ *b)* $(e^{-t} t, e^{-t} \operatorname{sen} t, 2e^{-t})$

c) $(t - 6, \operatorname{sen} t - 2t, 2 - 2t^2)$ *d)* $(t^2 \operatorname{sen} t - 2t, 6 - t^3, t^2 - 3 \operatorname{sen} t)$

2. $(2 + t^2) \vec{i} + (t^3 - t) \vec{j} - 3t \vec{k}$

3. $\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = 1 + t$

7.4

1. *a)* $\lim\limits_{t \to 1} \vec{F}(t) = \left(\lim\limits_{t \to 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, \lim\limits_{t \to 1} t^2, \lim\limits_{t \to 1} \frac{t - 1}{t}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

b) $(3, 2, 0)$ *c)* $3 \vec{i} + \frac{\pi}{4} \vec{j} + 4 \vec{k}$

2. *a)* $\lim\limits_{t \to t_0} [\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = \left(\lim\limits_{t \to t_0} [F_1(t) + G_1(t)], \ldots, \lim\limits_{t \to t_0} [F_n(t) + G_n(t)]\right) =$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = \vec{a} + \vec{b}$

b) $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) \vec{F}(t) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} f(t) F_1(t), \lim\limits_{t \to t_0} f(t) F_2(t), \ldots, \lim\limits_{t \to t_0} f(t) F_n(t)\right) =$

$= (La_1, La_2, \ldots, La_n) = L \vec{a}$

c) $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} (F_2(t) G_3(t) - F_3(t) G_2(t), F_3(t) G_1(t) - F_1(t) G_3(t),$

$F_1(t) G_2(t) - F_2(t) G_1(t)) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

3. *a)* $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 0\}$ *b)* $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 1\}$

5. *a)* $|\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)| \leqslant \|\vec{F}(t)\| \|\vec{G}(t)\|$ e $\lim\limits_{t \to t_0} \underbrace{\|\vec{F}(t)\|}_{0} \underbrace{\|\vec{G}(t)\|}_{\text{limitada}} = 0$; pelo teorema do confronto,

$\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)| = 0$; logo, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 0$.

6. Como $\vec{F}$ é contínua em $[a, b]$, $\|\vec{F}(t)\|$ também será. Segue que $\|\vec{F}(t)\|$ é limitada em $[a, b]$, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|\vec{F}(t)\| \leqslant M$ em $[a, b]$.

7.5

1. *a)* $\frac{d\vec{F}}{dt} = \left(6t, -e^{-t}, \frac{2t}{1 + t^2}\right)$; $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2} = \left(6, e^{-t}, \frac{2 - 2t^2}{(1 + t^2)^2}\right)$

b) $\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} \vec{i} - 2t \operatorname{sen} t^2 \vec{j} + 3\vec{k}$; $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2} = \frac{-2}{9t\sqrt[3]{t}} \vec{i} - (2 \operatorname{sen} t^2 + 4t^2 \cos t^2) \vec{j}$

c) $\frac{d\vec{F}}{dt} = 5 \cos 5t \vec{i} - 4 \operatorname{sen} 4t \vec{j} + 2e^{-2t} \vec{k}$; $\frac{d^2F}{dt^2} = -25 \operatorname{sen} 5t \vec{i} - 16 \cos 4t \vec{j} - 4e^{-2t} \vec{k}$

2. *a)* $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right) + \lambda \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $(x, y) = (1, 1) + \lambda (2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\right) + \lambda \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 4\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1) + \lambda (1, 2, 1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

3. Seja $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$; sendo $F'(t) = \vec{0}$ em I, resulta $F_i'(t) = 0$ em I, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Segue que existem constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$, tais que $F_i(t) = k_i$, para todo t em I, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Portanto, $F(t) = k$ em I, onde $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

4. Verifique que $\frac{d}{dt}\left[\vec{F}(t) \wedge \frac{d\vec{F}}{dt}(t)\right] = \vec{0}$ em I, e use o Exerc. 3.

5. *Sugestão*: para $t \geqslant 0$, $\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{t} \Leftrightarrow \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = t$.

7. *a)* $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t \vec{j}$; $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j}$

b) $\vec{v}(t) = -\operatorname{sen} t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t \vec{i} - \operatorname{sen} t \vec{j}$

c) $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0$; $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

d) $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t$; $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$

9. *a)* $\|\vec{T}(t)\| = 1$, $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = 1$, daí $2 \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{T} = 0$, ou seja, $\vec{T}$ e $\frac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais.

b) *Sugestão*: $\vec{v}(t) = v(t) \vec{T}(t)$.

12. *a)* $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right) \vec{i} + \vec{j} \, 2t \vec{k}$

b) $\vec{r}(t) = (2 - \cos t) \vec{i} + \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t - 1\right) \vec{j} + (2 + \ln(t + 1)) \vec{k}$

c) $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 2t \vec{i} + (1 - e^{-t}) \vec{j} + (t + 1) \vec{k}$

7.6

1. *a)* $\int_0^1 [t \vec{i} + e^t \vec{j}] \, dt = \left[\int_0^1 t \, dt\right] \vec{i} + \left[\int_0^1 e^t \, dt\right] \vec{j} = \frac{1}{2} \vec{i} + (e - 1) \vec{j}$

b) $\frac{\pi}{2} \vec{j} + 2\vec{k}$ *c)* $3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

2. *a)* $(2 - e) \vec{i} + \left(e - \frac{3}{2}\right) \vec{j} - \frac{1}{2} \vec{k}$ *b)* $\frac{1}{2} + e$

3. Observe que $\vec{G}(t) = \left(\int_0^1 F_1(s) \, ds, \ldots, \int_0^1 F_n(s) \, ds\right)$ e aplique o teorema fundamental do cálculo.

4. *a)* $2\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{8}{3}\vec{k}$ *b)* $\ln 2\,\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \vec{k}$

7.7

1. *a)* $\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$ *b)* $\sqrt{5}$

c) $\int_0^{\pi} \sqrt{1+e^{-2t}}\,dt = \int_{\operatorname{arctg} e^{-\pi}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + (\cos\theta)^{-2}\operatorname{sen}\theta\right] d\theta =$

$= \ln \frac{1+\sqrt{1+e^{-2\pi}}}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \pi - \sqrt{1+e^{-2\pi}}$

d) $\sqrt{3}\,[1 - e^{-1}]$ *e)* $\ln \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+e^2}} + 1 + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}$

f) π *g)* $\frac{e - e^{-1}}{2}$

2. $L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta =$

$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta\right)^2}\,d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$

3. *a)* $\frac{1}{2}\left[\pi\sqrt{1+\pi^2} + \ln\left(\pi + \sqrt{1+\pi^2}\right)\right]$ *b)* $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) π *d)* $\sqrt{2}\,[1 - e^{-2\pi}]$

8. *a)* $\delta(s) = \left(\frac{2s}{\sqrt{13}} + 1, \frac{3s}{\sqrt{13}} - 1\right)$ *b)* $\delta(s) = \left(2\cos\frac{s}{2}, 2\operatorname{sen}\frac{s}{2}\right)$

c) $\delta(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

d) $\delta(s) = \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\ln\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right)$

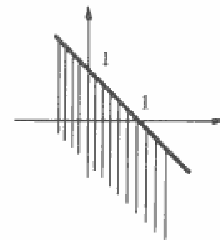
CAPÍTULO 8

8.1

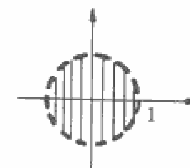
1. *a)* 1 *b)* $3a + 2x$
c) 3 *d)* 2

2. *a)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -2y\}$ *b)* $\frac{u}{v}$

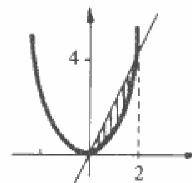
3. *a)*



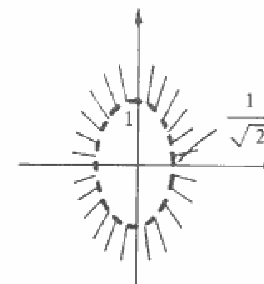
b)



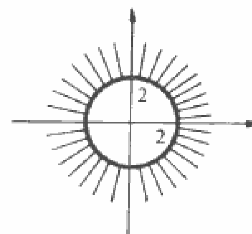
c)



d)

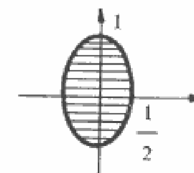


e)

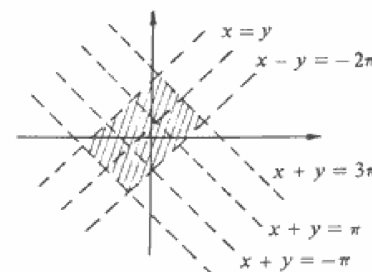


f) $|x| - |y| \geq 0 \Leftrightarrow -|x| \leq y \leq |x|$

g)



h)



4. $f(x, y) = ax + by$, onde a e b devem ser determinados de modo que $f(1, 0) = 2$ e $f(0, 1) = 3$. Tem-se $a = 2$ e $b = 3$. Assim: $f(x, y) = 2x + 3y$.

5. *a*) homogênea de grau zero. *b*) homogênea de grau 2.
c) não é homogênea. *d*) homogênea de grau -2.

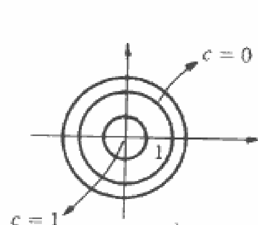
6. *a*) $f(4\sqrt{3}, 4) = f\left(8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 \cdot \frac{1}{2}\right) = 8^2 f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 64\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$. (Observe que $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ e que $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

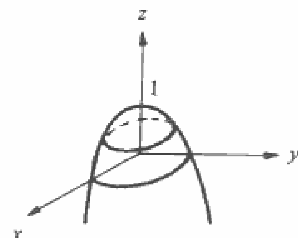
b) $f(0, 3) = 3^2 f(0, 1) = 0$

c) $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^2\, f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = x\sqrt{x^2 + y^2}$

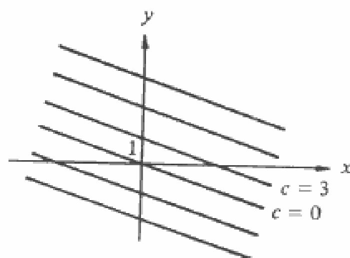
8.2

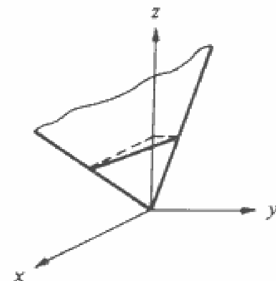
1. *a*) $1 - x^2 - y^2 = c$ ou $x^2 + y^2 = 1 - c \ (c \leq 1)$



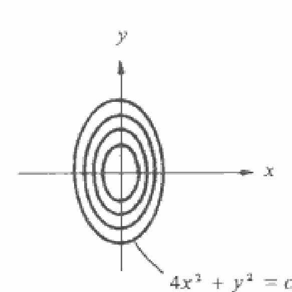


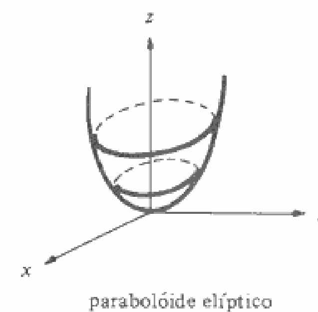
b) $x + 3y = c$





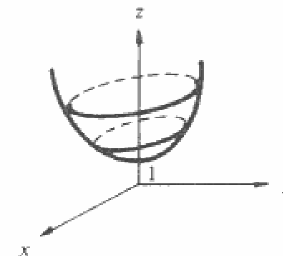
c)



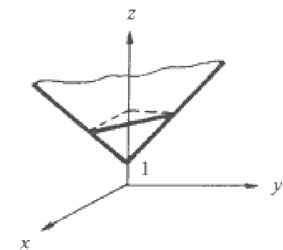


parabolóide elíptico

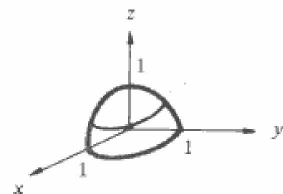
d) As curvas de nível são circunferências com centros na origem.



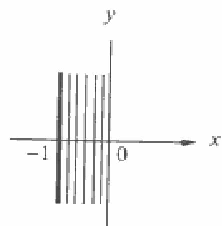
e) As curvas de nível são retas paralelas a $x + y = 0$.

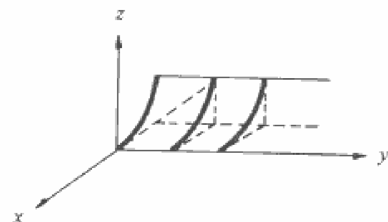


f) As curvas de nível são as circunferências $x^2 + y^2 = 1 - c^2$, com $0 \leq c \leq 1$.
O gráfico de g é a parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, correspondente a $z \geq 0$.

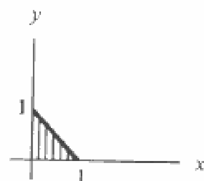


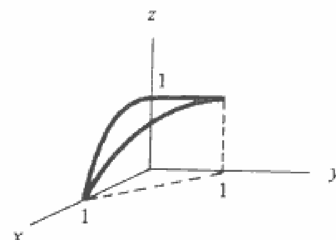
g) $x^2 = c$ $(0 \leqslant c \leqslant 1)$; $x = -\sqrt{c}$



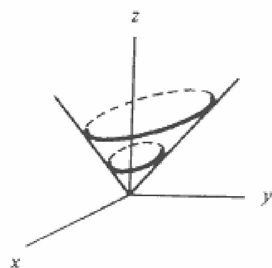


h)

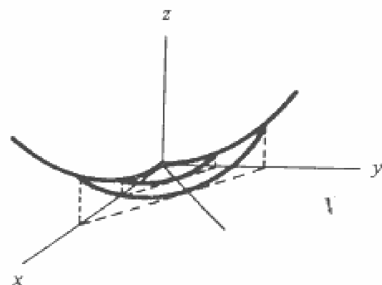




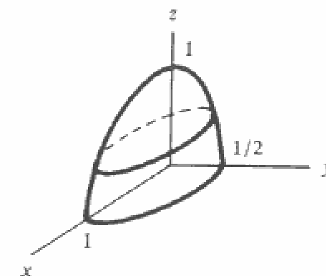
i) As curvas de nível são as circunferências $x^2 + y^2 = c^2$, $c \geqslant 0$.



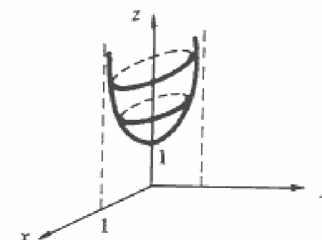
j) $y = x$ é a curva de nível correspondente a $c = 0$. Para $c > 0$, a curva de nível é o par de retas $y = x + \sqrt{c}$ e $y = x - \sqrt{c}$.



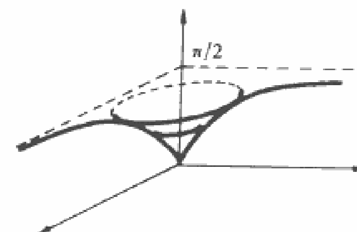
l) As curvas de nível são as elipses $x^2 + 4y^2 = 1 - c^2$ $(0 \leqslant c \leqslant 1)$.



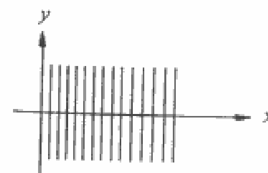
m) As curvas de nível são as circunferências $(c \geqslant 1)$ $x^2 + y^2 = 1 - \dfrac{1}{c^2}$.

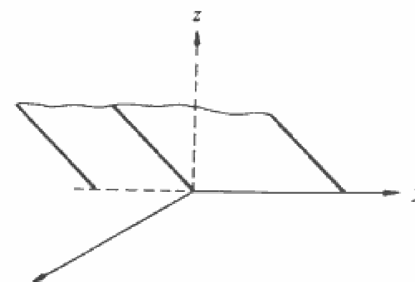


n) As curvas de nível são as circunferências $x^2 + y^2 = \operatorname{tg} c \left(0 \leqslant c < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

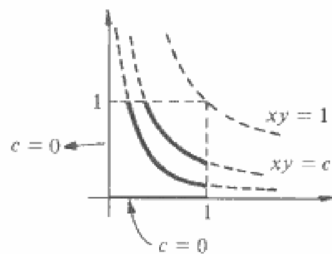


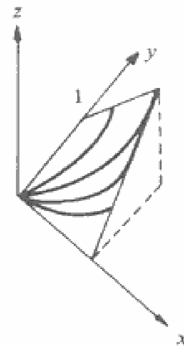
o) As curvas de nível são retas $x = c$ $(c \geqslant 0)$.



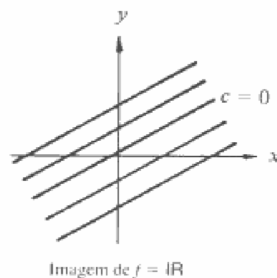


r)

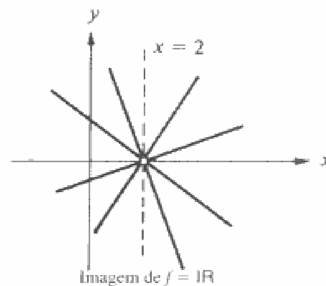




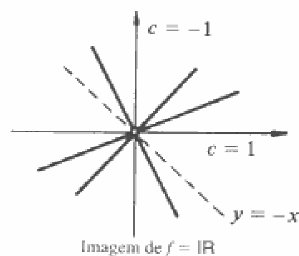
2. a) $x - 2y = c$ $(c \in \mathbb{R})$



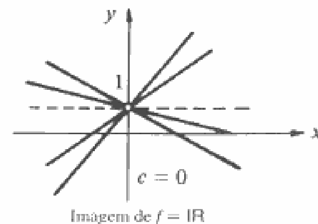
b) $c = \dfrac{y}{x-2} \Leftrightarrow y = c(x-2),\ x \neq 2$



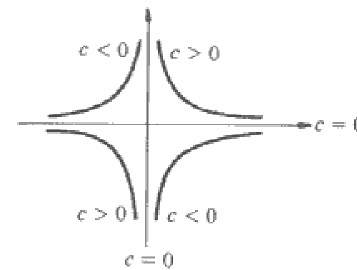
c) $(1 + c)y = (1 - c)x$ $(c \in \mathbb{R})$



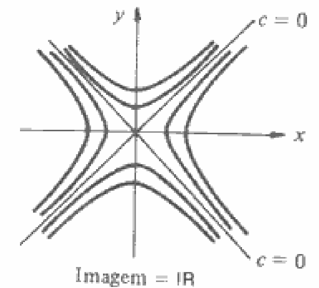
d) $c(y - 1) = x$ $(c \in \mathbb{R})$



e) $xy = c$ $(c \in \mathbb{R})$

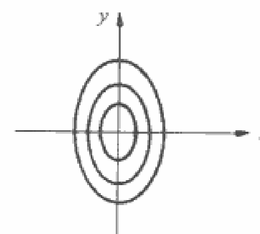


f) $x^2 - y^2 = c$ $(c \in \mathbb{R})$



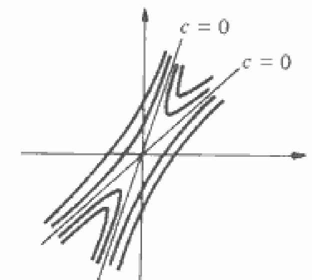
g) $4x^2 + y^2 = c$ $(c \geqslant 0)$

Imagem = $[0, +\infty[$



h) $c = 3x^2 - 4xy + y^2$

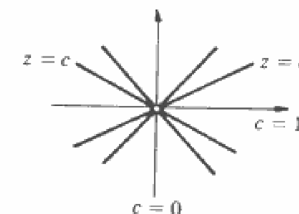
$y = 2x \pm \sqrt{x^2 + c}$ $(c \in \mathbb{R})$



i) $cy^2 = (1 - c)x^2$ $(0 \leqslant c \leqslant 1)$

Se $c = 0$, $x = 0$

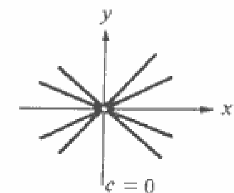
Se $c \neq 0$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{1-c}{c}}\,x$



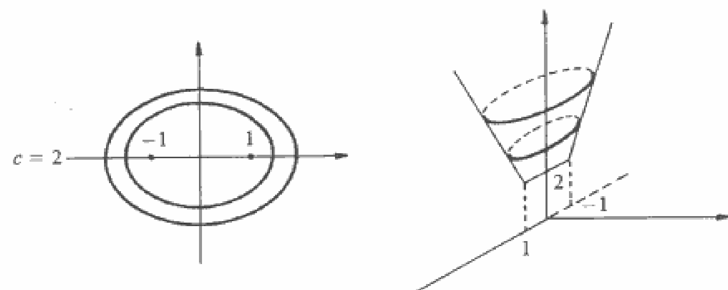
j) Se $c = 0$, $x = 0$ ou $y = 0$

Se $c \neq 0$, $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4c^2}}{2c}$

Imagem $= \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$



3.



4 *a*) $f(1, 1) = 3$ é o valor mínimo de f. Não admite valor máximo.

b) Não admite valor máximo, nem mínimo.

c) Zero é o valor mínimo de f; este valor é atingido nos pontos $(x, 0)$, $x \geq 0$, ou $(0, y)$, $y \geq 0$. Não há valor máximo.

d) Valor máximo: 1; este valor é atingido nos pontos $(x, 0)$, $x \neq 0$. O valor mínimo é zero, que é atingido nos pontos $(0, y)$, $y \neq 0$.

e) $f\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$ é o valor mínimo de f em A; f não admite valor máximo em A.

f) 2 é o valor máximo, que é atingido em $(0, 0)$: $f(0, 0) = 2$. Não há valor mínimo.

g) $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ é o valor máximo; $f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$ é o valor mínimo.

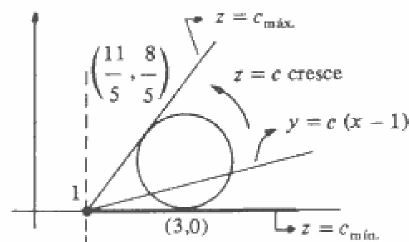
$\left(\right.$*Sugestão:* $g(x) = x\sqrt{1 - 4x^2}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, fornece os valores de f sobre o conjunto $4x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0\left.\right)$

5. *a*) $f(0, 0) = 3$ é o valor mínimo e $f(2, 0) = 7$ o valor máximo.

b) $f(1, 3) = 4$ é o valor máximo e $f(0, 0) = 0$ o valor mínimo.

c) $f(-1, 1) = -\frac{1}{2}$ é o valor máximo e $f(0, 2) = -2$ o valor mínimo.

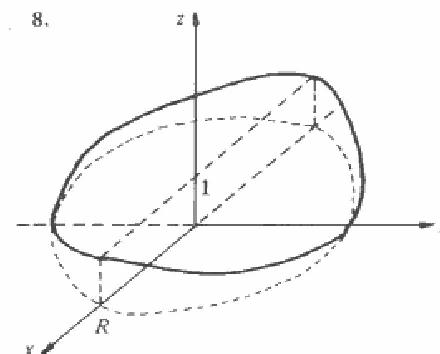
d) $f(3, 0) = 0$ é o valor mínimo e $f\left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{4}{3}$ é o valor máximo.



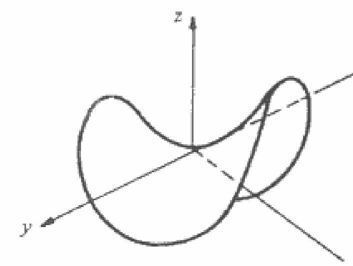
6. O que se quer são os valores máximo e mínimo de $z = (5 - t)(t^2 + 3)$ em $[0, 4]$. Altura máxima: 24. Altura mínima: $\frac{392}{27}$.

7. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

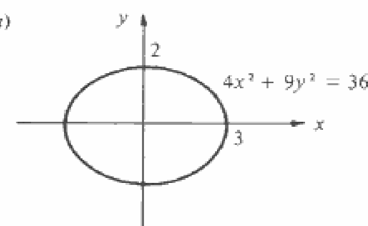
8.



11.

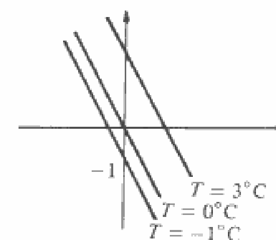


12. *a*)



b) $\left(\frac{9}{13}, \frac{4}{13}\right)$

13. *a*)



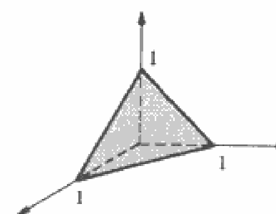
b) Ponto de mais alta temperatura: $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. Ponto de mais baixa temperatura: $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

8.3

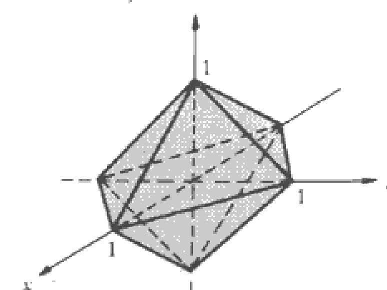
1. *a*) É uma esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1.

b) É o semi-espaço abaixo do plano $z = 1$.

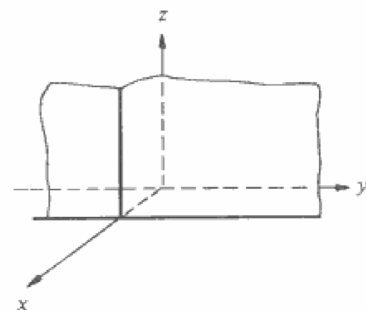
c)



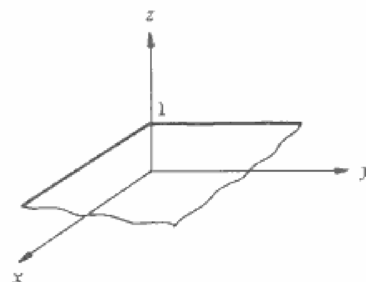
d)



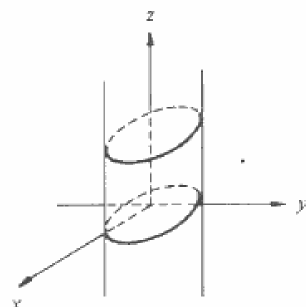
2. *a)*



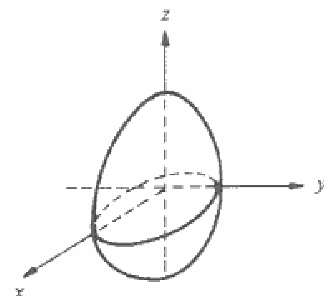
b)



c)



d)



CAPÍTULO 9

9.1

1. *a)* 0 *b)* Não existe
c) 0 *d)* Não existe
e) Não existe *f)* Não existe
g) Não existe *h)* Não existe

4. 0 5. Não existe.

6. De $\lim_{u \to a} g(u) = L$ segue que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que
① $0 < |u - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(u) - L| < \epsilon$.

De $\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = a$, segue para o $\delta_1 > 0$ acima, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - a| < \delta_1$$

Como $a \notin Dg$ e $I_m f \subset D_g$, resulta $f(x, y) \neq a$ para todo $(x, y) \in D_f$. Assim,

② $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x, y) - a| < \delta_1$.

De ① e ②: $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |g(x, y)) - L| < \epsilon$.

7. 1 8. 0.

9.2

1. *a)* $\mathbb{R}^2$ *b)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 6\}$
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ *d)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ *f)* $\mathbb{R}^2$
g) $\mathbb{R}^2$

2. É contínua em (0, 0): $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} x \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$.

5. Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < c\}$. Precisamos provar que para todo $(x_0, y_0) \in B$ existe uma bola aberta, de centro (x_0, y_0), contida em B. Como f é contínua em (x_0, y_0), tomando-se $\epsilon > 0$, com $f(x_0, y_0) + \epsilon < c$, existe $r > 0$ (como A é aberto, podemos tomar r de modo que a bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r esteja contida em A) tal que

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r \Rightarrow f(x, y) < f(x_0, y_0) + \epsilon < c$$

e, portanto, $V \subset B$; logo, B é aberto.

CAPÍTULO 10

10.1

1. *a)* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 20x^3y^2 + y^3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 10x^4y + 3xy^2$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -y \operatorname{sen} xy$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x \operatorname{sen} xy$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^2y(1 - x)}{(x^2 + y^2)^2}$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2 - y^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2 - y^2}$

e) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \ln(1 + x^2 + y^2) + \dfrac{2x^3}{1 + x^2 + y^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^2y}{1 + x^2 + y^2}$

f) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}(1 + xy)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}(1 + xy)$

g) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 12y(4xy - 3y^3)^2 + 10xy$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(4xy - 3y^3)^2(4x - 9y^2) + 5x^2$

h) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-x}{x^2 + y^2}$

i) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = yx^{y-1}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x^y \ln x$

j) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\,[1 + \ln (x^2 + y^2)]$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\,[1 + \ln (x^2 + y^2)]$

l) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^2 + 3)^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(x^3 + y^2 + 3)^2}}$

m) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\operatorname{sen} y\,[\cos (x^2 + y^2) + 2x^2 \operatorname{sen} (x^2 + y^2)]}{[\cos (x^2 + y^2)]^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x \cos y \cos (x^2 + y^2) + 2yx \operatorname{sen} y \operatorname{sen} (x^2 + y^2)}{[\cos (x^2 + y^2)]^2}$

3. *a)* 4 *b)* -4

6. $\dfrac{\partial p}{\partial V} = -\dfrac{nRT}{V^2}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T} = \dfrac{nR}{V}$

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x} e^y \phi' (x - y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^y \phi (x - y) - e^y \phi' (x - y)$; logo, $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^y \phi (x - y) = z$.

10. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 - yz}{xy + 3z^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-xz}{xy + 3z^2}$

13. $17 \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} = y + 4z^3 \dfrac{\partial z}{\partial x} \right)$

15. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-(x^2 + y^2)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-(x^2 + y^2)^2}$

16. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^4}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-y^4}$

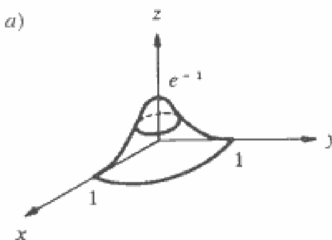
18. $\phi (y) = \dfrac{1}{2} \ln (1 + y^2)$

19. $x^3 y^2 - 6xy + \dfrac{1}{2} \ln (1 + y^2)$

20. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} (0, 0) \text{ não existe} \right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4x^2y^3 + 2y^5 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} (0, 0) = 0$

21. *a)*

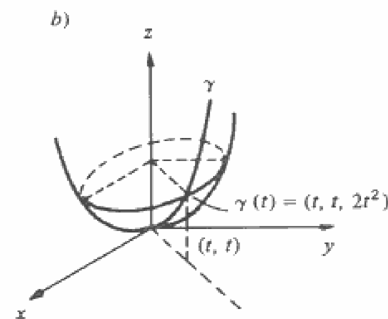


b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{-2x}{(x^2 + y^2 - 1)^2}\, e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

23. *a)* $z(t) = f(t, t) = 2t^2$

b)



c) $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda (1, 1, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Verifique que (1, 1, 2) pertence ao plano e que $\gamma'(1)$ é ortogonal ao vetor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} (1, 1), \frac{\partial f}{\partial y} (1, 1), -1 \right).$$

(Observe que $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} (1, 1), \dfrac{\partial f}{\partial y} (1, 1), -1 \right)$

é normal ao plano.)

24. $z(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2 \Rightarrow z'(t) = 2x(t)\,x'(t) + 2y(t)\,y'(t)$. Segue que $\gamma'(0) = (x'(0), y'(0), 2x'(0) + 2y'(0))$. Verifique que (1, 1, 2) pertence ao plano e que $\gamma'(0)$ é ortogonal a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} (1, 1), \frac{\partial f}{\partial y} (1, 1), -1 \right).$$

25. O plano determinado por T_1 e T_2 passa pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é normal ao vetor

$$\gamma_1'(y_0) \wedge \gamma_2'(x_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0)\, \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0)\, \vec{j} - \vec{k}.$$

A equação do plano é, então:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0), -1 \right) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] = 0$$

ou seja, $z - f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0)(y - y_0)$.

29. *a)* $(0, 0)$ *b)* Não há

c) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ *d)* $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$

e) $(1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ *f)* $(0, 0), (1, -1)$ e $(-1, 1)$

10.2

1. *a)* $\frac{\partial f}{\partial x} = (1 + x)\, e^{x - y - z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x\, e^{x - y - z}$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = -x\, e^{x - y - z}$

b) $\frac{\partial w}{\partial x} = 2x \text{ arc sen } \frac{y}{z}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x^2\,|z|}{z\sqrt{z^2 - y^2}}$ e $\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{|z|\sqrt{z^2 - y^2}}$

c) $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{xy(x + y)}{(x + y + z)^2}$ *d)* $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2 + z^2)$

e) $\frac{\partial s}{\partial w} = x\left[\frac{2w^2}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} + \ln(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\right]$

4. *c)* $\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = f(x + y^2 + z^4) \cdot 4z^3$; $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1) = 16$

6. *a)* 8 *b)* 8 *c)* 8

CAPÍTULO 11

11.1

1. *a)* $E(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, k = hk$. Então,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} h\, \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Portanto $f(x, y)$ é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathrm{IR}^2$, ou seja $f(x, y) = xy$ é uma função diferenciável.

d) $E(h, k) = \frac{1}{(x + h)(y + k)} - \frac{1}{xy} + \frac{h}{x^2 y} + \frac{k}{xy^2} = \frac{h^2y^2 + h^2ky + k^2x^2 + hkxy + hk^2x}{(x + h)(y + k)\, x^2y^2}$.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{(x + h)(y + k)\, x^2y^2} \cdot \frac{h^2y^2 + h^2ky + k^2x^2 + hkxy + hk^2x}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

pois,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{(x + h)(y + k)\, x^2y^2} = \frac{1}{x^3y^3}, \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2y^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} hy^2\, \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0, \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} h^2y\, \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \text{ etc.}$$

Segue que f é diferenciável em todo $(x, y) \neq (0, 0)$, ou seja, $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ é uma função diferenciável.

2. *a)* $\lim_{t\to 0} f(t, 0) = 1$ e $\lim_{t\to 0} f(0, t) = -1$, logo, f não é contínua em $(0, 0)$, portanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

b)
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\, k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{h^2k}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}}_{G(h,\,k)}$$

não existe, pois, $\lim_{k\to 0} G(0, k) = 0$ e $\lim_{t\to 0^+} G(t, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Portanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

c)
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^4}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^4}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \overset{0}{h} \underbrace{\frac{h^2}{h^2 + k^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}}_{\text{limitada}} = 0.$$

Portanto, f é diferenciável em $(0, 0)$.

11.2

1. *a)* $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x - y^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\, e^{x - y^2}$ são contínuas em IR^2, logo, f é diferenciável em IR^2, ou seja, f é uma função diferenciável.

2. *a)* f não é contínua em $(0, 0)$, logo, não é diferenciável neste ponto. Em $\mathrm{IR}^2 - \{(0, 0)\}$ as derivadas parciais são contínuas, logo f é diferenciável em todos os pontos deste conjunto. Assim, $\mathrm{IR}^2 - \{(0, 0)\}$ é o conjunto dos pontos em que f é diferenciável.

b) Em $\mathrm{IR}^2 - \{(0, 0)\}$ as derivadas parciais são contínuas, logo f é diferenciável em todos os pontos deste conjunto. Em $(0, 0)$,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2 + k^2} - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

não existe, logo f não é diferenciável em $(0, 0)$. Assim, $\mathrm{IR}^2 - \{(0, 0)\}$ é o conjunto dos pontos em que f é diferenciável.

c) IR^2 *d)* IR^2

11.3

1. *a*) $z = 4x + 2y - 4$; $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(4, 2, -1)$
   b) $z = 2y - 1$; $(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(0, 2, -1)$
   c) $z = -8x + 2y + 8$; $(x, y, z) = (1, -1, -2) + \lambda(-8, 2, -1)$
   d) $z = 9x - 8y$; $(x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda(9, -8, -1)$

2. $x + 6y - 2z = 3$

3. $z = 2x + y - \dfrac{5}{4}$

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1.$

5. *a*) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\dfrac{1}{3}$ *b*) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, 3)$

8. $z = 2x + 3y + 3$

9. $z = 0$ e $z = 6x + 6y - 18$

11. *a*) $V(a, b) = \dfrac{(1 + a^2 + b^2)^3}{24ab}$ *b*) $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{1}{2}$

12. $z = 2\sqrt{2}\,y$ e $z = -2\sqrt{2}\,y$

14. $z - z_0 = -\dfrac{x_0c^2}{a^2z_0}(x - x_0) - \dfrac{y_0c^2}{b^2z_0}(y - y_0)$; segue que

$$\frac{z_0z}{c^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = -\frac{x_0x}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^2},$$

ou seja,

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1, \quad \text{pois} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Observação. As derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ foram obtidas diretamente da equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

11.4

1. *a*) $dz = 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy$
   b) $dz = \left[\text{arc tg}\,(x + 2y) + \dfrac{x}{1 + (x + 2y)^2}\right]dx + \dfrac{2x}{1 + (x + 2y)^2}\,dy$
   c) $dz = y\cos xy\,dx + x\cos xy\,dy$
   d) $du = 2s\,e^{s^2 - t^2}\,ds - 2t\,e^{s^2 - t^2}\,dt$
   e) $dT = \dfrac{2p}{1 + p^2 + V^2}\,dp + \dfrac{2V}{1 + p^2 + V^2}\,dV$
   f) $dx = \dfrac{v}{\sqrt{1 - u^2v^2}}\,du + \dfrac{u}{\sqrt{1 - u^2v^2}}\,dv$

2. *a*) $\Delta z \cong dz$ e $dz = (e^{x^2 - y^2} + 2x^2e^{x^2 - y^2})\,dx - 2xye^{x^2 - y^2}\,dy$. Fazendo $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0{,}01$ e $dy = 0{,}002$, resulta $\Delta z \cong 0{,}03 - 0{,}004$, ou seja, $\Delta z \cong 0{,}026$.
   b) Para $x = 1$ e $y = 1$ tem-se $z = 1$. Assim, $1 + 0{,}026 = 1{,}026$ é um valor aproximado para z correspondente a 1,01 e 1,002.

3. *a*) $dz = \dfrac{1}{2}\,dx + \dfrac{1}{12}\,dy$ *b*) 2,9966
   c) $\Delta z \cong \dfrac{-0{,}1}{2} + \dfrac{0{,}01}{12}$, ou seja, $\Delta z \cong -0{,}049166$

4. $A = xy$; $dA = y\,dx + x\,dy$. Assim, $\Delta A \cong y\,dx + x\,dy$ onde $x = 2$, $y = 3$, $dx = 0{,}01$ e $dy = -0{,}03$, ou seja, $\Delta A \cong -0{,}03$.

5. $V = \pi r^2h$ é o volume do cilindro de altura h e raio da base r; $dV = 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh$. Sendo ΔV o volume do material utilizado na caixa, $\Delta V \cong 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh$, onde $r = 1$, $h = 2$, $dr = 0{,}03$ e $dh = 0{,}03$, ou seja, $\Delta V \cong 0{,}15\pi$.

6. $\Delta P \cong -5$ watts.

7. $\Delta V \cong \dfrac{2}{3}\pi rh\,dr + \dfrac{1}{3}\pi r^2dh$, onde $r = 12$, $h = 20$, $dr = -0{,}1$ e $dh = 0{,}2$.

8. $(1{,}01)^{2{,}03} \cong 1 + dz$, onde dz é a diferencial de $z = x^y$, no ponto $(1, 2)$, relativa aos acréscimos $dx = 0{,}01$ e $dy = 0{,}03$. Ou seja, $(1{,}01)^{2{,}03} \cong 1{,}02$.

9. $\Delta z = dz$ onde dz é a diferencial de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, no ponto $(3, 4)$, relativa aos acréscimos $dx = 0{,}01$ e $dy = -0{,}1$.

11. *a*) $dw = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ *b*) $dx = e^{2u + 2v - t^2}(2\,du + 2\,dv - 2t\,dt)$
    c) $dw = \dfrac{2x}{1 + z^2}\,dx + \dfrac{2y}{1 + z^2}\,dy - \dfrac{2z(x^2 + y^2)}{(1 + z^2)^2}\,dz$
    d) $ds = 2xyz\,(1 + x^2)^{yz - 1}\,dx + (1 + x^2)^{yz}\ln(1 + x^2)\,[z\,dy + y\,dz]$

12. $\sqrt{(0{,}01)^2 + (3{,}02)^2 + (3{,}97)^2} \cong 5 + dw$, onde dw é a diferencial de $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, no ponto $(0, 3, 4)$, relativa aos acréscimos $dx = 0{,}01$, $dy = 0{,}02$ e $dz = -0{,}03$

$$\sqrt{(0{,}01)^2 + (3{,}02)^2 + (3{,}97)^2} \cong 4{,}988.$$

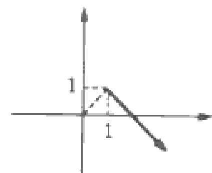
11.5

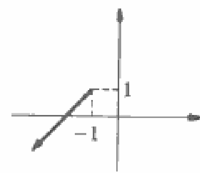
1. *a*) $(2xy, x^2)$ *b*) $e^{x^2 - y^2}(2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j})$
   c) $\left(\dfrac{1}{y}, -\dfrac{x}{y^2}\right)$ *d*) $\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}$

2. *a*) $\dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ *b*) $(2x, 2y, 2z)$
   c) $(2xz^2(x^2 + y^2 + 1)^{z^2 - 1}, 2yz^2(x^2 + y^2 + 1)^{z^2 - 1}, 2z(x^2 + y^2 + 1)^{z^2}\ln(x^2 + y^2 + 1))$
   d) $\left(\dfrac{yz}{x^2 + y^2}, \dfrac{-xz}{x^2 + y^2}, \text{arc tg}\,\dfrac{x}{y}\right)$

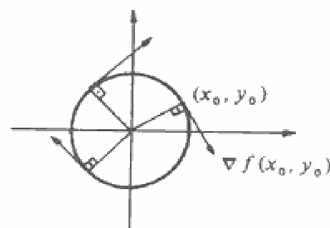
3. $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$

a) $\nabla f(1, 1) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ b) $\nabla f(-1, 1) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$





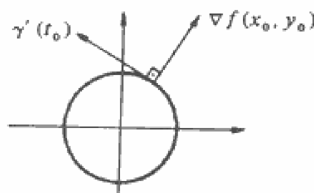
4. $\nabla f(x_0, y_0) = y_0\vec{i} - x_0\vec{j}$. Observe que $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal a $x_0\vec{i} - y_0\vec{j}$: $\nabla f(x_0, y_0)$ é tangente em (x_0, y_0) à circunferência $x^2 + y^2 = 1$.



Observe, ainda, que para todo (x_0, y_0) na circunferência $x^2 + y^2 = 1$, $\|\nabla f(x_0, y_0)\| = 1$.

5. Derivando em relação a t os dois membros de $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$, resulta:

$$2x(t)\,x'(t) + 2y(t)\,y'(t) = 0.$$



Para $t = t_0$, $(2x_0, 2y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$, ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$. $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é uma curva cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 1$.

7. a) $f'(x, y) = (y, x)$ b) $f'(x, y) = 2^{x-y}\ln 2\,(1, -1)$

c) $f'(x, y) = \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y}\sec^2\dfrac{x}{y},\ -\dfrac{x^2}{y^2}\sec^2\dfrac{x}{y}\right)$

d) $f'(x, y) = \left(\dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}},\ \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}}\right)$

11. b) $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$
c) $(2, 8, 18) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = 0$

CAPÍTULO 12

12.1

1. a) $9t^2 \cos 3t^3$ b) $-4 \operatorname{sen} t \cos t$

2. a) $3\dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t^2 - 1) + 4t\dfrac{\partial f}{\partial y}(3t, 2t^2 - 1)$ b) 1

3. a) $2t\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t) + 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t)$

b) $3\cos 3t\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2\operatorname{sen} 2t\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, onde $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 2t$

4. $2t\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, 2t) = 3t^2 - 3$; faça agora, $t = 1$.

5. a) $-\dfrac{11}{6}$ b) $z - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{11}{6}(x - 3) + 2(y - 1)$

6. $g'(t) = -1$.

7. $x = 2\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ é uma parametrização da elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Basta mostrar que $g'(t) = 0$ em IR, onde $g(t) = f(2\cos t, \operatorname{sen} t)$. Observe que a função g fornece os valores de f sobre a elipse dada.

8. $\gamma'(t) = (2, 2t, z'(t))$ e $z'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\dfrac{dy}{dt}$; $\gamma'(1) = (2, 2, 0)$ e $\gamma(1) = (2, 1, 3)$. A reta tangente é: $(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(2, 2, 0)$, $\lambda \in$ IR.

10. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u + 2v, u^2 - v) + 2u\dfrac{\partial f}{\partial y}(u + 2v, u^2 - v)$

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, onde $x = u + 2v$ e $y = u^2 - v$.

14. $\dfrac{dz}{dt} = 2t f(t^2, t^3) + t^2\left[2t\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3)\right]$.

16. $z = u f(x, y)$, $x = u - v$ e $y = u + v$. Então:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f(x, y) + u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u\left[-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right].$$

Portanto,

$$u\frac{\partial z}{\partial u} + u\frac{\partial z}{\partial v} = z + 2u^2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

18. $\frac{d}{dx}[f(x, g(x))] = \frac{d}{dx}[0]$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\, g'(x) = 0.$

19. $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ e $f'(t) = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(t, f(t))}{\frac{\partial g}{\partial y}(t, f(t))}$. A equação da reta tangente é:

$$(x, y) = (0, 1) + \lambda\left(1, -\frac{1}{2}\right), < \lambda \in \mathbb{R}.$$

20. $\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y, \overbrace{g(x, y)}^{z})] = \frac{\partial}{\partial x}[0]$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))};\ \text{então, } \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{5};\ \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

A equação do plano tangente no ponto (1, 1, 3) é: $z - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$.

Observe: $\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y, \overbrace{g(x, y)}^{z})] = \frac{\partial y}{\partial x}\overbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}^{1} + \frac{\partial f}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y)}^{0} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$

21. *a)* $g'(t) = 6t\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + 2e^{2t}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ onde $x = 3t^2$, $y = t^3$ e $z = e^{2t}$

b) $g'(0) = 8$.

22. $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x^2 + y, 2y, 2x - y) + x\left[2x\frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y, 2y, 2x - y) + 2\frac{\partial f}{\partial z}(x^2 + y, 2y, 2x - y)\right]$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y, 2y, 2x - y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + y, 2y, 2x - y) - \frac{\partial f}{\partial z}(x^2 + y, 2y, 2x - y)\right]$

Observação: Poderia ter feito $g(x, y) = xf(u, v, w)$, $u = x^2 + y$, $v = 2y$ e $w = 2x - y$. Teríamos, então:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f(u, v, w) + x\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\right] = \dots$$

30. $f(x, y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$, onde $\phi(u)$ é uma função diferenciável qualquer.

32. Para cada (x, y) fixo, $\frac{d}{dt}[f(tx, ty)]\Big|_{t=0} = f(x, y)$,

ou seja,

$$x\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}_{a} + y\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}_{b} = f(x, y).$$

12.2

1. Seja $F(x, y) = y^3 + xy + x^3 - 4$; F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, $F(0, \sqrt[3]{4}) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0, \sqrt[3]{4}) \neq 0$.
Pelo teorema das funções implícitas, a equação define uma função $y = y(x)$ de classe C^1 num intervalo aberto I contendo 0. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}$.

2. *a)* Seja $F(x, y) = x^2y + \text{sen } y - x$; observe que $F(0, 0) = 0$ e que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \neq 0;\ \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 1}{x^2 + \cos y}$$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 4x^3}{4y^3 + 2x^2y}$

3. *a)* Seja $F(x, y, z) = e^{x+y+z} + xyz - 1$; note que

$F(0, 0, 0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0$; $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy}$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 1}{3z^2 - 1}$

4. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y\frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)}$$

8. *a)* $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ *b)* $y = x$ e $z = \sqrt{1 - x^2}$

10. $$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

11. *a)* $2(x - y)$ *b)* $-2xy^2$
c) $-2[s + 3r]$ *d)* $2t[-9 + 2s]$

12. *a)* $\frac{\partial}{\partial u}(v) = \frac{\partial}{\partial u}(xy)$; $0 = y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u}$.

b) $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0$

13. *a)* $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{x}{2(x^2 - y^2)}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{-y}{2(x^2 - y^2)}$

b) $x = \dfrac{\sqrt{u + 2v} - \sqrt{u - 2v}}{2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{u + 2v} + \sqrt{u - 2v}}{2}$

15. *a)* $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{u + y^2}{u - 2x}$

b) $x = \dfrac{u - \sqrt{4v - 3u^2}}{2}$ e $y = \sqrt{\dfrac{u + \sqrt{4v - 3u^2}}{2}}$.

CAPÍTULO 13

13.1

1. *a)* $(x, y) = (1, 3) + \lambda(-6, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *b)* $\gamma(t) = (\sqrt{10}\cos t, \sqrt{10}\operatorname{sen} t)$

2. Reta tangente: $(x, y) = (2, 5) + \lambda(-2, 5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Reta normal: $(x, y) = (2, 5) + \lambda(5, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. *a)* $(4, 2) \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$ ou $y - 2 = -2(x - 1)$.
b) $y = -4x + 3$.

4. $y = -2x + 3$ ou $y = -2x - 3$

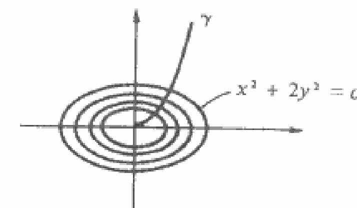
5. $y - 2 = -\dfrac{4}{5}(x - 1)$ ou $y + 2 = -\dfrac{4}{5}(x + 1)$

6. *a)* $f(x, y) = \varphi(2x - 3y)$ onde $\varphi(u)$ é uma função derivável qualquer.
b) $f(x, y) = \varphi(x + y)$ onde $\varphi(u)$ é uma função derivável qualquer.
c) $f(x, y) = \varphi(x - y)$ onde $\varphi(u)$ é uma função derivável qualquer.
d) $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ onde $\varphi(u)$ é uma função derivável qualquer.

7. $f(x, y) = \varphi(x + y)$, com $\varphi(u)$ definida e derivável em $\mathbb{R}$, satisfaz a condição $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Determine uma $\varphi(u)$ tal que $\varphi(2) = 3$, $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = 2$. Por exemplo, tome $\varphi(u) = au^2 + bu + c$ e determine a, b e c para que as condições acima se cumpram.

8. $f(x, y) = \varphi(2x + y)$, com $\varphi(u)$ definida e derivável em $\mathbb{R}$, satisfaz a condição $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Para que o gráfico de f contenha a imagem de γ é preciso que $\varphi(3t) = t^2$. Basta então tomar $\varphi(u) = \dfrac{u^2}{9}$. A função $f(x, y) = \dfrac{1}{9}(2x + y)^2$ resolve o problema.

9. Seja $F(x, y) = x^2 + 2y^2$. Vamos determinar γ de modo que, para todo t, $\gamma'(t) = \nabla F(\gamma(t))$, ou seja, $\dot{x} = 2x$ e $\dot{y} = 4y$. Assim, $x = k_1 e^{2t}$ e $y = k_2 e^{4t}$. Para que a condição inicial $\gamma(0) = (1, 2)$ se verifique devemos tomar $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$; $\gamma(t) = (e^{2t}, 2e^{4t})$ intercepta ortogonalmente todas as curvas da família $x^2 + 2y^2 = c$ e passa por $(1, 2)$.



10. Seja $F(x, y) = xy$. A função $y = y(x)$ deve ser solução da equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}$, ou seja,

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$. Assim, $y^2 = x^2 + c$.

a) $y = x$ *b)* $y = \sqrt{x^2 + 3}$

13.2

1. *a)* Plano tangente: $(2, -6, 8) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 1)] = 0$ ou $x - 3y + 4z = 8$.
Reta normal: $(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(2, -6, 8)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Plano tangente: $6x + 3y + z = 9$.
Reta normal: $(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, 3\right) + \lambda(6, 3, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Plano tangente: $x - y + 4z = 4$.
Reta normal: $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda(1, -1, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $z - 2 = -\dfrac{1}{4}(x - 1) - \dfrac{1}{4}(y - 1)$.

3. $x + y + z = \dfrac{11}{6}$ ou $x + y + z = -\dfrac{11}{6}$.

(*Sugestão.* Seja $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$. O ponto de tangência (x_0, y_0, z_0) deve satisfazer as condições: $x_0^2 + 3y_0^2 + 2z_0^2 = \dfrac{11}{6}$ e $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \lambda(1, 1, 1)$, para algum λ.)

4. $x + y + \sqrt{2}\, z = 2$.

5. $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. *a)* $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 1)$.

7. *a)* $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) $x = \dfrac{1}{2}\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = 1 - \dfrac{1}{2}\cos t - \operatorname{sen} t$.

8. *a)* $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - y^4 z^4 + 8$.
b) $x - 7y + 16z = -28$.

9. $-5x + 16y + 9z = 54$.

10. $x - 2y + 2z = 7$ ou $x + 2y + 2z = 7$.

13.4

1. *a)* $-\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ *b)* $-\dfrac{2}{5}$

c) 0 *d)* $\sqrt{2}$

2. *a)* $3\vec{i} + 3\vec{j}$ e $-3\vec{i} - 3\vec{j}$ *b)* $\vec{i} - \vec{j}$ e $-\vec{i} + \vec{j}$

c) $-\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{i} + \vec{j}$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = \|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}}$

4. *a)* $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ *b)* $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$

5. $-\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

6. *a)* $(1, 3)$ *b)* $2\sqrt{2}$

7. $x = e^{-4t}$ e $y = 2e^{-2t}$, $t \geq 0$.

8. $\gamma(t) = (t, \sqrt{t^2 + 3})$, $t \geq 1$.

9. $\nabla f(1, 2) = (2, 1)$. Seja $\gamma(t) = (1 + 2t, 2 + t, f(1 + 2t, 2 + t))$. A tangente em $\gamma(0) = (1, 2, f(1, 2))$ é a reta procurada: $(x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(2, 1, 5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

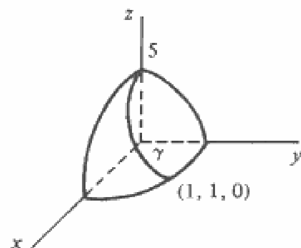
10. $(x, y, z) = (1, 1, 4) + \lambda(1, 2, 5)$.

11. Seja P' a projeção de P sobre o plano xy; P' move-se sempre na direção e sentido de máximo crescimento de f. Sendo $(x(t), y(t))$, uma parametrização para a trajetória de P', $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde $z(t) = f(x(t), y(t))$, será uma parametrização para a trajetória de P: $\gamma(t) = (t^4, t, 4t^8 + t^2)$.

12. $(0, \sqrt{3})$.

(*Sugestão*. Aproveite a solução do problema 8.)

13. $\gamma(t) = (t, t^4, 5 - t^2 - 4t^8)$, $0 \leq t \leq 1$.



14. *a)* $x^2 + 2y^2 = 17$ *b)* $-6\vec{i} - 8\vec{j}$

c) 0,1°C *d)* 0,08°C

15. *a)* $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ *b)* $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

16. $\dfrac{5}{6}\sqrt{13}$

CAPÍTULO 14

14.1

1. *a)* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 6x^2y$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 6x^2y$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2 - y^2}(1 + 2x^2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xye^{x^2 - y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2 - y^2}(2y^2 - 1)$

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2 + 2y^2 - 2x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2 + 2x^2 - 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

$= \dfrac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$

d) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 24xy^4$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 18x^3y^2 + 9y$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y} = 48x^2y^3 = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y\, \partial x}$

8. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0) = -1$

11. $-\dfrac{1}{3}$

14. *a)* $-4xy \operatorname{sen}(x^2 - y^2)^2$ *b)* 0

14.2

1. *a)* $2t\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \cos t\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)$, $x = t^2$ e $y = \operatorname{sen} t$

b) $3t^2\dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t) + t^3\left[3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t, 2t) + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(3t, 2t)\right]$

c) $2t\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, 2t) + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(t^2, 2t) + 5\left[3\cos 3t\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\operatorname{sen} 3t, t) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\operatorname{sen} 3t, t)\right]$

2. $g(t) = f(x, y)$, $x = 5t$ e $y = 4t$; $g'(t) = 5\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 4\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Então:

$$g''(t) = 25\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 40\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) + 16\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

9. $f(x, y) = 0$, onde $y = g(x)$; $\dfrac{d}{dx}[f(x, y)] = 0$, daí,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^2}$$

$$g''(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

10. *b)* $f(x, t) = \varphi(x + t) + \theta(x - t)$, onde $\varphi(v)$ e $\theta(u)$ são funções quaisquer, deriváveis até a 2.ª ordem. Observe que $g(u, v) = \varphi(v) + \theta(u)$ satisfaz $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\,\partial u} = 0$.

13. 0

14. 0

CAPÍTULO 15

15.1

1. *a)* $f(2, 3) - f(1, 1) = \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot [(2, 3) - (1, 1)]$, com $(\bar{x}, \bar{y})$ no segmento de extremos (1, 1) e (2, 3). Assim, $(\bar{x}, \bar{y})$ é solução do sistema

$$\begin{cases} 12 = (4\bar{x}, 3) \cdot (1, 2) \\ 2\bar{x} - \bar{y} = 1 \text{ com } 1 < \bar{x} < 2 \end{cases}$$

Então, $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

b) $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

c) $\left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$

15.3

1. *a)* $f(x, y) = 3x^3y^2 - 5x^2 + y + k$

b) $f(x, y) = \text{sen}\, xy + x^3 - xy + y^3 + k$

c) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2} + \text{arc tg}\, y + k$

2. $f(x, y) = x^2y^3 - x^2 + y^2 - y - 8$.

3. $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2 + y^2) + \dfrac{1}{2}e^{y^2} + \dfrac{3}{2}$.

4. Não, pois, $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 1) \neq \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 1)$.

5. $\varphi_1(x, y) = -\text{arc tg}\,\dfrac{x}{y} + \dfrac{\pi}{2}$.

6. $\varphi_2(x, y) = \text{arc tg}\,\dfrac{y}{x} + \pi$.

7. $\varphi(x, y) = \begin{cases} -\text{arc tg}\,\dfrac{x}{y} + \dfrac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ \text{arc tg}\,\dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0. \end{cases}$

8. *a)* Sim, pois admite função potencial $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$.

b) Não, pois, $\dfrac{\partial}{\partial y}(y) \neq \dfrac{\partial}{\partial x}(-x)$.

c) $\varphi(x, y) = xy + y^2$ é uma função potencial, logo, $\vec{F}$ é conservativo.

d) Admite função potencial $\varphi(x, y) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, logo é conservativo.

e) Não, pois, $\dfrac{\partial}{\partial y}(4) \neq \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2)$.

f) Admite função potencial $\varphi(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, logo é conservativo.

9. Como $\vec{F}$ é conservativo, existe $\varphi(x, y)$ definida em A tal que $\nabla\varphi(x, y) = \vec{F}(x, y)$. Pela regra da cadeia, $\dfrac{d}{dt}(\nabla\varphi(\gamma(t))) = \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Portanto,

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = [\nabla\varphi(\gamma(t))]_a^b = 0.$$

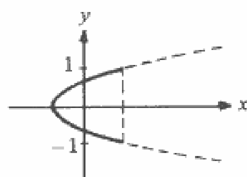
11. *a)* $U(x, y) = 3x^2 + y^2$

b) $U(x, y) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2}$

c) $U(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ d) Não é conservativo

12. a) $\vec{F}(x, y) = -\nabla U = (-4x, -y)$.

b) $\ddot{x} = -4x, \ddot{y} = -y, x(0) = 1, y(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$; $\ddot{x} + 4x = 0 \Rightarrow x = A_1 \cos 2t + B_1 \operatorname{sen} 2t$; $\ddot{y} + y = 0 \Rightarrow y = A_2 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t$. Tendo em vista as condições iniciais, $\gamma(t) = (\cos 2t, \cos t)$. Como $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, a imagem de γ está contida na parábola $x = 2y^2 - 1$.



Como $y = \cos t$, a imagem de γ é arco de parábola $x = 2y^2 - 1, -1 \leq y \leq 1$.

13. a) $\vec{F}(x, y) = -x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$.

b) $\gamma(t) = (\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t) = \sqrt{2}\left(\cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. A trajetória é a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

14. $\gamma(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t)$. A trajetória é a elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

15.4

1. a) $1 + x + 5y$ b) $5 + (x - 1) + 7(y - 1)$

c) $3x + 4y$

2. b) Inferior a 10^{-2}

3. $$|f(x, y) - P_1(x, y)| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(y-1)^2\right| = \frac{1}{2}|(6\bar{x} - 2)(x-1)^2 + 6\bar{y}(y-1)^2|.$$

De $0 < \bar{x} < 2$ e $0 < \bar{y} < 2$ segue

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 7(x-1)^2 + 6(y-1)^2.$$

4. a) 4,931

b) 10^{-3}

7. $$ah^2 + bhk + ck^2 = a\left[h^2 + \frac{b}{a}hk + \frac{b^2}{4a^2}k^2 - \frac{b^2}{4a^2}k^2 + \frac{c}{a}k^2\right] = a\left[\left(h + \frac{b}{2a}k\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}k^2\right] > 0 \text{ para todo } (h, k) \neq (0, 0).$$

15.5

1. a) xy

b) $6 + 8(x-1) + 10(y-1) + 5(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + 9(y-1)^2$

2. $6 + 8(x-1) + 10(y-1) + 5(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + 9(y-1)^2 + (x-1)^3 + 2(x-1)^2(y-1) + 3(y-1)^3$.

CAPÍTULO 16

16.1

1. $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ é candidato a ponto de mínimo local.

2. Não admite extremante local: $\left(-\dfrac{1}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$ é o único ponto crítico e não pode ser extremante local, pois, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{1}{13}, \dfrac{5}{13}\right) = 2$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\dfrac{1}{13}, \dfrac{5}{13}\right) = -2$

3. $(0, 0)$ e $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$ candidatos a ponto de máximo local.

4. $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ é candidato a ponto de mínimo local. O ponto crítico $(0, 0)$ não é extremante local, pois $x = 0$ não é extremante local de $g(x) = f(x, 0) = x^3$.

5. $(-1, -1)$ é candidato a ponto de mínimo local.

6. $(1, 1)$ é candidato a ponto de mínimo local; $(-1, -1)$ é candidato a ponto de máximo local. Os pontos críticos $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ não são extremantes locais.

16.3

1. a) $\left(\dfrac{54}{7}, -\dfrac{22}{7}\right)$ ponto de mínimo local. (Conforme Exerc. 2, é ponto de mínimo global.)

b) $(1, 1)$ é ponto de mínimo local, mas não global ($f(0, y) = y^3 - 4y + 5$ tende a $-\infty$ quando $y \to -\infty$). $\left(\dfrac{23}{12}, -\dfrac{5}{6}\right)$ é ponto de sela.

c) $(-1, 1)$ é ponto de sela. $\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$ é ponto de mínimo local, mas não global ($f(x, 0) = x^3 - 5x$ tende a $-\infty$ para $x \to -\infty$).

d) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ é ponto de sela.

e) $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ são pontos de sela.

f) Não admite ponto crítico.

g) Os extremantes locais de f coincidem com os extremantes locais de $g(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y$; $(2, 1)$ é ponto de mínimo local. (Conforme Exerc. 2, é ponto de mínimo global.)

h) $(0, 0)$ ponto de máximo local; $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ pontos de sela; $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$ pontos de mínimo locais (verifique que são pontos de mínimo globais).

i) $(1, 2)$ é ponto de mínimo local.

j) $(-1, -1)$ é ponto de mínimo local.

l) $(1, 1)$ é ponto de mínimo local; $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ pontos de sela; $(-1, -1)$ ponto de máximo local.

3. *a)* $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ ponto de mínimo global.

b) Não admite extremantes, pois, para todo (x, y), $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$. O ponto crítico $\left(\frac{10}{13}, \frac{11}{13}\right)$ é de sela.

c) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ponto de máximo global.

d) $\left(\frac{2}{11}, \frac{10}{11}\right)$ é ponto de mínimo global.

e) Não admite extremante; $(2, -2)$ é ponto de sela. [Desenhe as imagens das curvas

$$\gamma_1(t) = (t, -2, f(t, -2)) \text{ e } \gamma_2(t) = (2 - 3t, -2 + 2t, z(t))$$

onde $z(t) = f(2 - 3t, -2 + 2t)$].

f) $(1, 2)$ ponto de mínimo global.

4. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

5. $E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [\alpha a_i + \beta - b_i]^2$; $\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} 2a_i[\alpha a_i + \beta - b_i]$ e $\frac{\partial E}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} 2[\alpha a_i + \beta - b_i]$. (α, β) é a solução do sistema

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + n\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i \end{cases}$$

6. *a)* $y = \frac{5}{2}x + 1$ [Sugerimos desenhar a reta encontrada e marcar os pontos dados.]

b) $y = \frac{9}{10}x + \frac{14}{10}$

7. *a)*

a_i	b_i	a_i^2	$a_i b_i$
5	100	25	500
6	98	36	588
7	95	49	665
8	94	64	752
26	387	174	2.505

(α, β) é solução do sistema

$$\begin{cases} 26\alpha + 4\beta = 387 \\ 174\alpha + 26\beta = 2.505 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -\frac{21}{10}x + \frac{1.104}{10}}$$

b) 89,4

8. $(\lambda, 2\lambda, 2)$ e $(\mu, \mu, 4 + \mu)$ são pontos arbitrários de r e s, respectivamente;

$$\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + (2\lambda - \mu)^2 + (2 + \mu)^2}$$

é a distância entre eles. Basta, então, determinar (λ, u) que minimiza $g(\lambda, u) = (\lambda - u)^2 + (2\lambda - u)^2 + (2 + u)^2$. $P = (-1, -2, 2)$ e $Q = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

9. $(1, 2, 1)$.

10. $L = p_1x + p_2y - [x^2 + 2y^2 + 2xy] = 120x + 200y - 3x^2 - 3y^2 - 2xy$. A produção que maximiza o lucro é $x = 10$ e $y = 30$.

11. $L = 5z - (2x + y)$. A produção z que maximiza o lucro é a correspondente a $x = 15{,}8$ e $y = 20{,}4$, ou seja, $z = 1576{,}2$.

13. $\left(\frac{34}{14}, \frac{25}{14}, \frac{16}{14}\right)$

14. $x + y + z = \frac{3}{2}$.

15. *a)* $(1, 0, 2)$ ponto de mínimo local (verifique que é ponto de máximo global).

b) $(1, 1, 1)$ ponto de mínimo local; $(-1, -1, -1)$ ponto de máximo local; $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$; $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 1)$ não são extremantes (veja Exerc. 16).

c) $(-1, 1, 2)$ não extremante; $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ é ponto de mínimo local.

d) $(3, -2, -1)$ não é extremante.

16.4

1. *a)* Valor máximo é 6 e é atingido em $(2, 0)$; valor mínimo é -3 e é atingido em $(0, 3)$.

b) $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ é ponto de máximo; $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ é ponto de mínimo.

c) Valor máximo é 0 e é atingido nos pontos $(0, y)$, $0 \leq y \leq 1$. O valor mínimo é -2 e é atingido em $(1, 0)$.

d) Valor mínimo é 0 e é atingido nos pontos $(0, y)$, $0 \leq y \leq 5$, $(x, 0)$, $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$. O valor máximo é $\frac{25}{8}$ que é atingido em $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$.

e) O único ponto crítico no interior de A é $(0, 0)$ que não é extremante. Assim, f assumirá os valores máximo e mínimo na fronteira $x^2 + y^2 = 4$ de A; $g(t) = f(2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$ fornece os valores de f na fronteira. O valor máximo é 4, sendo atingido nos pontos $(0, 2)$ e $(0, -2)$. O valor mínimo é -4, sendo atingido nos pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

f) Valor mínimo é 0, sendo atingido em $(0, 0)$. Valor máximo é 2, sendo atingido nos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

2. $\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{34}\right)$. $\left[\textit{Sugestão}: \text{Utilize a função } g(x) = f\left(x, \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}\right), -1 \leq x \leq 1.\right]$

3. $(2, 0)$

4. Valor máximo é 25, sendo atingido em $(0, 5)$.

5. O problema consiste em maximizar o lucro $L = 10x + 6y$ (x é quantidade do produto I e y do produto II) com as restrições: $x \leq 20$, $y \leq 45$, $5x + 4y \leq 200$, $10x + 4y \leq 240$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O lucro será máximo para $x = 8$ e $y = 40$.

6. $(0, 1)$ maximiza; $\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$ minimiza.

7. Observe que $Q(at, bt) = t^2 Q(a, b)$, onde $a^2 + b^2 = 1$.

16.5

1. *a*) $\left(\frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right)$ é ponto de máximo; $\left(-\frac{6}{\sqrt{38}}, -\frac{1}{\sqrt{38}}\right)$ é ponto de mínimo.

b) $\left(\frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right)$ é ponto de máximo; $\left(-\frac{6}{\sqrt{38}}, -\frac{6}{\sqrt{38}}\right)$ é ponto de mínimo.

c) $\left(\frac{6}{19}, \frac{1}{19}\right)$ ponto de mínimo.

d) $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ponto de mínimo.

e) $(2, 1)$ e $(-2, -1)$ pontos de máximo; $(-2, 1)$ e $(2, -1)$ pontos de mínimo.

f) $(-1, 1)$ ponto de mínimo.

g) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ponto de mínimo; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontos de máximo.

h) $(2, 0)$ ponto de máximo; $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ pontos de mínimo.

i) $(1, 1)$ ponto de mínimo local; $\left(-\frac{13}{7}, \frac{17}{7}\right)$ ponto de máximo local.

j) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ponto de máximo, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ponto de mínimo.

2. $x^2 + 16y^2 = 8$; o ponto de tangência é $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

3. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

4. $(2, 4)$. [*Sugestão*: minimize $f(x, y) = (x - 14)^2 + (y - 1)^2$ com a restrição $y = x^2$.]

5. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

6. $x^2 + y^2 + 2y^2 = \frac{32}{19}$. O ponto de tangência é $\left(\frac{8}{19}, \frac{16}{19}, \frac{12}{19}\right)$

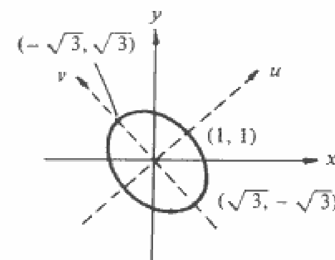
7. Valor máximo é 4, sendo atingido em $(1, 1, 1)$. O valor mínimo é -4, sendo atingido em $(-1, -1, -1)$.

8. $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\right)$ [*Sugestão*: minimize $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com a restrição $x + 2y - 3z = 4$].

9. $\left(\frac{24}{11}, -\frac{9}{11}, \frac{5}{11}\right)$ [*Sugestão*: minimize $x^2 + y^2 + z^2$ com as restrições $x + 2y + z = 1$ e $2x + y + z = 4$.]

10. $\left(\frac{2 - \sqrt{66}}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2 + \sqrt{66}}{6}\right)$ maximiza f.

11. $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ são os mais próximos da origem; $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ são os mais afastados.

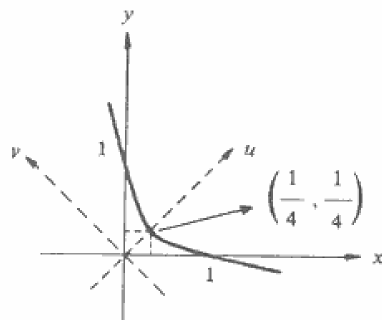


Observação: Sejam $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; sejam u e v as componentes de (x, y) na base $(\vec{u}, \vec{v})$; isto é: $(x, y) = u\vec{u} + v\vec{v}$, ou seja, $(x, y) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + v\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Verifique que a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} u - \frac{1}{\sqrt{2}} v \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} u + \frac{1}{\sqrt{2}} v \end{cases}$$

transforma a equação dada na equação $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{6} = 1$.

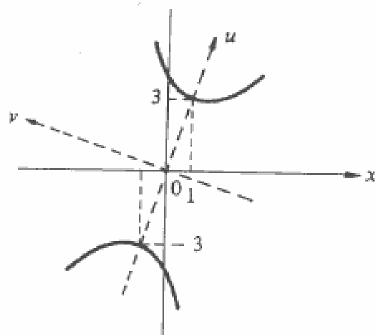
12. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Verifique que a mudança de coordenadas $x = \frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v$, transforma a equação dada na equação $2v^2 - 2\sqrt{2}\,u + 1 = 0$ que é uma parábola.



13. $(1, 3)$ e $(-1, -3)$. A mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}u - \frac{1}{\sqrt{10}}v \\ y = \frac{3}{\sqrt{10}}u + \frac{1}{\sqrt{10}}v \end{cases} \quad \text{ou } (x, y) = u\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)}_{\vec{u}} + v\underbrace{\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)}_{\vec{u}}$$

transforma a equação dada na equação $\frac{u^2}{10} - \frac{v^2}{40} = 1$ que é uma hipérbole:



Observe que $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ e $\vec{v} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ são os versores de $(1, 3)$ e $(-3, 1)$.

14. $(1, 1, 1)$.

15. 12 cada um.

16. Equilátero.

18. Cubo.

19. Cubo de aresta 1 m.

20. Cubo de aresta $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

21. Paralelepípedo de arestas $\frac{4}{\sqrt{3}}$, $\frac{6}{\sqrt{3}}$ e $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

22. $x = 4$, $y = 2$ e $z = \frac{4}{3}$.

23. Temperatura máxima 200. Temperatura mínima: -200.

24. $6x + 4y + 3z = 12\sqrt{3}$.

25. $P = (2, 1)$ e $Q = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$